

Ouvrages
d' Amy Dahan-Dalmedico

en collaboration
Mathématiques au fil des âges
Gauthier-Villars, 1987

en collaboration
Sciences à l'époque de la Révolution
Recherches historiques
Librairie A. Blanchard, 1988

en collaboration
Leçons de Mathématiques
à l'École normale de l'An III
Dunod, 1992

en collaboration
Chaos et Déterminisme
Seuil, coll. «Points Sciences», 1992

Mathématisations
A.-L. Cauchy et l'École mathématique française
Librairie A. Blanchard et Éditions du Choix, 1993

en collaboration
La Formation polytechnicienne (1794-1994)
Dunod, 1994

Ouvrages de Jeanne Peiffer

en collaboration
Essai sur la perspective de Jean-Henri Lambert (1752)
MONOM 1982, distribution Librairie A. Blanchard

en collaboration
Notes et Additions à la perspective affranchie de
l'embaras du plan géométral de Jean-Henri Lambert
CEDIC/Nathan, 1987

en collaboration
La Correspondance de Jean Bernoulli
t. 2. La correspondance avec Pierre Varignon
Éditions Birkhäuser, Bâle, 1988

La Géométrie de Dürer
traduction et présentation
Seuil, coll. «Sources», à paraître en 1995

Amy Dahan-Dalmedico
Jeanne Peiffer

Une histoire des mathématiques

Routes et dédales

Préface de Jean-Toussaint Desanti

Ouvrage publié avec le concours du
Centre national des Lettres

Éditions du Seuil

Les éditions Études vivantes ont publié en 1982
la première édition de cet ouvrage sous le titre :
Routes et dédales

Préface

« Histoire », cela s'entend en deux sens, au moins. Historiographie d'une part : récit selon un ordre chronologique de ce qui s'est passé dans tel ou tel domaine de l'activité humaine (l'activité de ces gens nommés « mathématiciens » par exemple). Genèse d'autre part : formation, persistance et transformations de la chose même que cette activité concerne. « D'une part », « d'autre part. » Sitôt écrites, ces expressions se révèlent fautives. Sans une stricte recollection des œuvres selon la succession des temps, on ne peut espérer saisir les moments d'une genèse. A l'inverse, cette recollection ne sert à rien si elle ne débouche sur la connaissance et la compréhension du mode de formation de l'objet même qui existe historiquement : les mathématiques, dans le cas présent.

Les auteurs de cet ouvrage ont su tenir les deux bouts de la chaîne. Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer ont rédigé une histoire des mathématiques à la fois précise, concrète et éclairante. Précise en ce qu'elle s'appuie sur une documentation de première main ; concrète parce qu'elle respecte la spécificité des œuvres, des thèmes et des époques ; éclairante puisqu'elle rend sensibles l'enchaînement des idées et l'émergence des problèmes. Les deux auteurs ne pouvaient tout dire : une histoire exhaustive est impossible ; il fallait donc choisir des thèmes ; isoler des champs théoriques, distinguer des moments historiques, significatifs et fructueux. Les choix d'Amy Dahan et de Jeanne Peiffer ont été judicieux, instructifs, du double point de vue épistémologique et pédagogique. Il est à souhaiter que beaucoup d'apprentis mathématiciens (et d'autres aussi qui ont cessé d'apprendre les éléments), lisent attentivement ce titre. Ils apprendront que les mathématiques aussi ont leur mémoire ; et que, comme toute mémoire, elle comporte des replis, des lieux cachés, qu'il importe de débusquer pour les ramener au jour. Pourquoi les ramener au jour ? Et pour quel bénéfice ? Faut-il, pour « apprendre les mathématiques », parcourir encore tous les chemins du passé ; revivre encore tous ces détours, affronter de nouveau, comme s'ils étaient les nôtres, tous ces problèmes, aujourd'hui résolus ? Tous, certainement pas. Qui le pourrait jamais ? Quelques-uns oui. Il le faut. Qui laisse totalement dormir sa mémoire devient étranger à son présent même, au point d'oublier le sens de ce qu'il y fait.

Les mathématiques ne sortent pas toutes faites de la tête du maître qui écrit au tableau noir. Elles ne résident pas, toutes faites, dans le traité, si achevé en sa belle ordonnance. Nullement. Leur état présent et décanté, par quoi nous commençons de les apprendre, n'est lui-même qu'une figure d'équilibre, précieuse aujourd'hui, mais transitoire comme d'autres qui l'ont

En couverture : Italie XV^e siècle. Histoire de Thésée : Thésée, Ariane et le Minotaure (détail). Musée du Petit Palais, Avignon. Archives Giraudon.

ISBN 2-02-009138-0
(ISBN 2-7310-4112-9, 1^{re} publication)

© ÉDITIONS DU SEUIL, MARS 1986

Le Code de la propriété intellectuelle interdit les copies ou reproductions destinées à une utilisation collective. Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

précédée et dont elle porte la marque. Apprendre à déchiffrer ces marques, c'est réveiller la mémoire. Le moins qu'on puisse y gagner, c'est un peu d'humour. On apprendra la peine qu'a coûté le moindre « pont aux ânes ». Mais on y gagnera bien davantage encore : plus de conscience ; une autre clarté que celle qui naît de la stricte observance des procédures, parce qu'elle concerne les motivations qui ont exigé ces procédures mêmes. « Pourquoi des mathématiques ? » dit-on. Et on ajoute aussi : « A quoi bon ? ». Un titre comme celui-ci montre comment « des mathématiques » se sont produites. Il montre quelles sortes de travaux, non homogènes, cette production a coûtés, à quelles exigences, à quelles contraintes internes et externes de tels travaux ont dû se plier. En cela il peut permettre de répondre à la double question : « Pourquoi ? » et « A quoi bon ? ».

Jean-Toussaint Desanti

Avertissement

Dans ce livre d'histoire des mathématiques s'inscrit notre rapport aux mathématiques elles-mêmes, marqué par la confiance et le plaisir, mais aussi le doute et la critique.

Manipuler avec dextérité symboles et formules, se mouvoir familièrement dans un monde d'objets abstraits que l'on a pu apprivoiser, maîtriser les enchaînements conceptuels et les mécanismes opératoires qui permettent de résoudre un problème est intellectuellement excitant.

Découvrir, comme on peut le faire au cours des études supérieures, que les mathématiques ne sont point une somme de résultats disparates, mais s'organisent en des théories globales et profondes, est très séduisant.

Malheureusement l'enseignement s'est trop souvent limité en France aux aspects rigides et immuables des théories, les « exercices » n'étant alors que des exemples artificiellement construits pour confirmer le bon fonctionnement de celles-ci.

Cette présentation aride qui privilégie de façon excessive le formalisme des mathématiques et occulte les problèmes concrets, les difficultés, l'analogie des situations, ... dont les synthèses théoriques ne sont que l'aboutissement, a provoqué en nous un certain rejet des mathématiques. Cette réaction s'est inscrite dans une interrogation plus générale, propre aux années soixante-dix, sur le rôle et le fonctionnement des sciences dans nos sociétés.

A la recherche d'ouvertures, nous nous sommes tournées vers l'histoire : elle s'est avérée une formidable aventure intellectuelle restituant la dimension culturelle des mathématiques trop souvent niée dans la technicité de leurs développements.

Dans la fréquentation de textes originaux et aussi dans celle d'ouvrages généraux — somme du savoir historiquement accumulé dans ce domaine — nous avons découvert un tissu complexe et foisonnant fait de conjectures, d'hésitations, d'impasses, de modèles concurrents, d'intuitions fulgurantes et aussi de moments d'axiomatisation et de synthèse. Le propos de ce livre est de participer à la circulation de ce savoir à partir de nos questionnements. Si modestement nous avons contribué à ce que s'introduise dans l'apprentissage et la diffusion de la science contemporaine, la dimension de son histoire, qui en rend la compréhension vivante et actuelle, ce livre n'aura pas été inutile.

Notre choix a été celui d'une histoire conceptuelle, qui privilégie le développement des idées internes à la discipline. Le premier chapitre, qui ne peut être que schématique dans sa brièveté, tente néanmoins d'établir des ponts avec les conditions d'évolution de la civilisation occidentale. Joint au

second, qui évoque la naissance d'une science rationnelle en Grèce, ils atténuent quelque peu notre parti pris.

Nous avons accordé une place importante aux mathématiques arabes trop souvent négligées, mais n'avons pu aborder celles qui se situent en dehors de l'orbite de la science occidentale, comme les mathématiques chinoises et indiennes.

Confrontées à l'immensité du champ mathématique, et aussi aux impératifs de librairie, nous avons choisi quelques concepts d'une part relativement accessibles, d'autre part suffisamment importants puisqu'ils gouvernent le développement de disciplines fondamentales (analyse, algèbre et géométrie) et permettent des aperçus sur des aspects négligés dans le livre*.

Comme il est impossible de suivre les idées en mathématiques sans frôler le côté technique, nous nous sommes efforcées de présenter, souvent dans les encadrés, les développements qui entrent dans le vif du formalisme. Cette mise en présence d'une pratique mathématique peut éveiller la curiosité et le goût du lecteur non initié.

On dispose, en France, de fort peu d'éditions abordables de textes scientifiques anciens; ainsi, s'il est possible de se procurer la *Géométrie* de Descartes dans une édition de poche bilingue américaine, aucune édition française n'est disponible. Nous avons donc uniquement indiqué à la fin de chaque chapitre les ouvrages originaux que l'on peut se procurer aisément en français; il ne s'agit en aucun cas d'une bibliographie exhaustive. Nous avons tenu à signaler, par honnêteté scientifique, les ouvrages et articles de recherche, quelques fois très récents, qui nous ont particulièrement guidées. Nous ne pouvons évidemment citer l'ensemble des sources diffuses — groupes de travail, séminaires, discussions, exposés — qui nous ont intellectuellement nourries et stimulées.

Nous tenons néanmoins à rendre hommage à M. R. Taton qui nous a initiées toutes les deux à l'histoire des mathématiques.

Nous sommes reconnaissantes à M. J. T. Desanti d'avoir animé notre goût de la spéculation et de l'analyse et d'avoir eu la gentillesse de préfacer ce livre. Nous remercions M. R. Rashed d'avoir mis à notre disposition l'ensemble de ses recherches sur les mathématiques arabes et d'en avoir débattu avec nous. Un grand merci aussi à François de Gandt, qui a relu le chapitre sur la Grèce.

Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer
Paris, décembre 1981

Quatre ans plus tard ce livre sort dans une collection de poche et nous tenons à remercier ici Jean-Marc Lévy-Leblond de l'effort déployé pour cette publication.

Ce fait témoigne aussi d'une nouvelle vigueur dans le développement de l'histoire des sciences en France. Un effort a été entrepris pour combler les lacunes les plus criantes dans la diffusion de textes anciens. Quelques nouvelles collections ont vu le jour. L'histoire des sciences a fait son apparition dans les cursus de l'enseignement supérieur, *ne* pénétrant *que* très timidement l'enseignement secondaire. De nombreux colloques, journées d'études et séminaires illustrent l'élargissement d'une communauté professionnelle.

Pourtant, il faut dire qu'aujourd'hui le pari n'est pas encore gagné pour que l'histoire des sciences, et notamment celle des mathématiques, constitue un pont entre le monde disciplinaire de la science et un plus large public ouvert à la culture scientifique. Sans doute est-elle encore prisonnière d'images anciennes et poussiéreuses, faites d'érudition trop pointilleuse et de développements trop techniques, qui concernent certes la communauté spécialisée, mais découragent les esprits curieux de l'activité intellectuelle dans les sciences exactes.

Le véritable enjeu de l'histoire et de la philosophie d'une science n'est-il pas de rendre perceptibles l'évolution de la pensée, celle des idées, dans cette science? Pour notre part, c'est le but que nous nous étions fixé.

Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer
Paris, octobre 1985

* Pour ce qui est des développements plus récents qui demandent un niveau mathématique plus avancé, nous renvoyons à l'*Abrégé d'histoire des mathématiques*, ouvrage collectif publié sous la direction de J. Dieudonné.

1. Paysages

Exemples de nombres

$$\lll \begin{matrix} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{matrix} 34 \qquad \ll \uparrow 11$$

$$\uparrow \lll \uparrow \uparrow 92 \qquad \uparrow \ll \uparrow 71$$

$$\uparrow 3600$$

$$\uparrow \uparrow \ll \uparrow \uparrow 3672 \quad (3672 = 60^2 + 60 + 10 + 2)$$

$$\ll \uparrow \uparrow \begin{matrix} \ll \\ \ll \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{matrix} 1364 \quad (1364 = 2 \times 10 \times 60 + 2 \times 60 + 4 \times 10 + 4)$$

$$\uparrow \ll \begin{matrix} \uparrow \uparrow \uparrow \ll \\ \uparrow \uparrow \uparrow \ll \\ \uparrow \uparrow \ll \end{matrix} \begin{matrix} \ll \\ \ll \\ \ll \end{matrix} \uparrow \ll \uparrow 319941 \\ (319941 = 60^3 + 20 \times 60^2 + 8 \times 60^2 + 50 \times 60 + 2 \times 60 + 20 + 1)$$

Les fractions

$$\uparrow \ll \ll 1\frac{1}{2} \qquad \uparrow \ll \ll 1\frac{1}{3}$$

$$\ll \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \frac{1}{4} \qquad \left(\text{car } \frac{1}{4} = \frac{15}{60} \right)$$

Extrait d'exercices effectués à l'École Normale des Hauts-de-Seine

1. Les premières civilisations anciennes

Les premières civilisations anciennes qui nous ont laissé des sources permettant d'analyser assez justement leurs connaissances mathématiques sont les civilisations babylonienne et égyptienne.

La première comprend un ensemble de peuples qui ont vécu en Mésopotamie entre 5000 avant Jésus-Christ et le début de notre ère, avec Babylone comme principal centre d'activité culturelle. Des fouilles archéologiques commencées au XIX^e siècle ont permis d'exhumer plusieurs centaines de tablettes d'argile frappées au stylet en écriture cunéiforme et probablement cuites ensuite, ce qui explique leur bon état de conservation. Près de trois cents d'entre elles concernent les mathématiques et elles datent soit de la première dynastie babylonienne (entre 1800 et 1500 avant Jésus-Christ), marquée par le règne d'Hammurabi, soit de la période dite hellénistique, entre 600 avant J.-C. et 300 après J.-C., de la dynastie chaldéenne à l'empire séleucide.

Les chercheurs O. Neugebauer et Thureau-Dangin ont donné les premières interprétations des tablettes permettant véritablement d'apprécier le niveau de leurs connaissances, suivis par Bruins et Rutten, qui ont publié et analysé les *Textes mathématiques de Suse*, découverts plus récemment.

Les tablettes comportent des séries de nombres, des relations géométriques et des problèmes. Comme nous analysons par ailleurs l'« algèbre » babylonienne (cf. chapitre 3), précisons ici les éléments de leur arithmétique.

Le système de numération babylonien est une combinaison d'un système sexagésimal et décimal, avec un principe de position : seuls deux signes différents interviennent qui désignent l'unité et le nombre 10; des combinaisons de ces deux signes interviennent au-delà de 60, suivant le principe de position. Aucun symbole spécifique pour le zéro n'est repéré dans les textes les plus anciens (vers 1700 avant J.-C.); la valeur numérique du symbole représentant un nombre dépend donc du contexte dans lequel il intervient, le même signe pouvant valoir 1, 60, 3600 ou, encore, 1/60, 1/3600... (cf. encadré 1).

La multiplication est exécutée en se référant à des tables de multiplication, sans doute établies à l'origine par additions successives, et l'utilisation de tables de réciproques permet de remplacer les divisions par des multiplications. Enfin, comme 60 a beaucoup de diviseurs, le principe de position des Babyloniens les favorise, par exemple par rapport aux Égyptiens,

on le verra, dans l'écriture des fractions. Ils peuvent en effet représenter 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/12, 1/15, 1/20, 1/30; ainsi le scribe babylonien peut écrire 1/2, c'est-à-dire $1 + \frac{30}{60}$, sous la forme $\uparrow \ll \ll$. Mais les Babyloniens excluent les inverses des nombres qui ne sont pas produits de facteurs premiers de 60 et ne s'écrivent pas $2^p 3^q 5^m$ (avec p, q, m entiers) car ces inverses n'ont pas de développement fini dans la base 60.

Les connaissances mathématiques des Babyloniens sont appliquées à des échanges de monnaie et de marchandises, à des problèmes d'intérêts simples et composés, à des calculs de taxes et de répartition des récoltes. La plupart des problèmes présents dans les tablettes cunéiformes sont de nature économique.

Quant à la civilisation égyptienne, formée des deux royaumes de la Haute et de la Basse-Égypte, sa période la plus brillante est celle de la III^e Dynastie des pharaons (vers 2500 avant J.-C.), qui fit construire les pyramides, mais

elle devait se poursuivre à l'abri d'influences extérieures jusqu'à la conquête d'Alexandre le Grand en 332 avant J.-C.

Les Égyptiens ont utilisé deux systèmes d'écriture. L'un, *hiéroglyphique*, utilisé sur les monuments et les pierres tombales, est pictural, chaque symbole représentant un objet. L'autre, *hiératique*, emploie des symboles conventionnels qui n'étaient à l'origine que des simplifications et des stylisations des hiéroglyphes. Ce dernier, mieux adapté à l'écriture manuelle, prédomine sur les papyrus, qui sont la principale source de renseignements sur les mathématiques égyptiennes. Les plus célèbres sont le *Papyrus Rhind* du British Museum, sorte de manuel pour non-initiés formé de quatre-vingt-cinq problèmes écrits par le scribe Ahmès vers 1650 avant J.-C., le *Papyrus de Moscou*, qui lui ressemble beaucoup, et le *Rouleau de cuir des mathématiques égyptiennes*, mis à plat à grand-peine en 1927 et particulièrement éclairant sur l'arithmétique égyptienne.

La numération hiéroglyphique est à base 10, non positionnelle : on dispose de symboles différents pour désigner 1, 10, 100, etc., on répète un symbole autant de fois qu'il le faut et, pour lire un nombre, on additionne la valeur de l'ensemble des symboles intervenant dans son écriture ; l'ordre de ceux-ci n'importe donc pas, la représentation pouvant être aussi bien horizontale que verticale.

La numération hiératique est aussi décimale, mais des signes spéciaux supplémentaires évitent la répétition des symboles du système hiéroglyphique (cf. encadré 2).

— 2. Le système hiéroglyphique de notation des entiers chez les Égyptiens —

Exemples :

IIII $\overbrace{\text{nnn}}^{\text{999}}$ $\overbrace{\text{99}}^{\text{564}}$

$\overbrace{\text{nnnn}}^{\text{999}}$ $\overbrace{\text{99}}^{\text{380}}$

II $\overbrace{\text{nn}}^{\text{99999}}$ $\overbrace{\text{9999}}^{\text{244}}$ $\overbrace{\text{nn}}^{\text{932}}$

II $\overbrace{\text{nn}}^{\text{1120}}$ $\overbrace{\text{nn}}^{\text{042}}$

En dehors des entiers, les Égyptiens ne conçoivent que les fractions unitaires. Dans les deux numérations, ils les écrivent en faisant surmonter le symbole représentant le dénominateur d'un signe particulier. De plus, la fraction 2/3 semble jouir d'un statut privilégié et un symbole lui est associé.

L'arithmétique s'organise autour de quelques règles :

— la possibilité de multiplier et de diviser par deux un nombre entier, ce qui leur permet ensuite d'effectuer par addition n'importe quelle multiplication ;

— la capacité de trouver les 2/3 de n'importe quelle fraction unitaire suivant la règle :

$$\frac{2}{3} \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n},$$

règle qu'ils simplifient, lorsque le dénominateur est pair, en :

$$\frac{2}{3} \frac{1}{n} = \frac{1}{n + \frac{n}{2}}$$

Enfin, se refusant à admettre des fractions autres qu'unitaires, ils sont conduits à décomposer des fractions de la forme $\frac{2}{n}$ en sommes de fractions unitaires ; comme par exemple $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Mais, ce calcul étant compliqué, ils se réfèrent à une table établie une fois pour toutes. Ainsi, le *Papyrus Rhind* débute par une liste des décompositions de $\frac{2}{n}$, de $n = 5$ à $n = 101$ (cf. encadré 3).

3. Le papyrus Rhind

Dans le *Papyrus Rhind*, on trouve,

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

Comment Ahmes peut-il y arriver ?

$$\begin{aligned} \frac{2}{13} &= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{104} + \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} \\ &= \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \left[\frac{1}{104} + \frac{1}{26} + \frac{1}{13} \right] \\ &= \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Quand le dédoublement est inefficace, le scribe utilise la réduction par la fraction 1/3.

Notons que le symbolisme actuel, s'il nous aide à faire comprendre le processus, n'est sans doute pas la marche opératoire réelle de l'Égyptien.

Le système de calcul nous paraît bien lent et primitif, mais il ne nécessite aucun effort de mémoire; le maniement des fractions unitaires, pourtant complexe, est effectué avec habileté par les scribes.

Cela est sans doute lié au fait que le système social pharaonique impliquait une énorme comptabilité matérielle dans le contrôle de la production et de la répartition des ressources, des denrées alimentaires et des objets, tâche qui incombait aux scribes. Les mathématiques égyptiennes semblent très concrètes, et on se reportera aux chapitres 3 et 4 pour ce qui concerne leur « algèbre » et leur géométrie.

2. La Grèce

La civilisation ancienne qui a joué le rôle le plus éminent dans le développement des mathématiques occidentales est celle des Grecs. Nous lui avons consacré un chapitre entier (cf. chapitre 2), et nous nous bornerons ici à la situer dans l'histoire et à indiquer brièvement comment calculaient les Grecs.

Le peuple hellène est issu de deux vagues successives d'invasisseurs indo-européens : les Achéens se sont installés dans le Péloponnèse vers l'an 2000 avant J.-C.; nous connaissons leurs épopées et leurs hauts faits à travers les héros mi-légendaires des poèmes homériques. Les Doriens ont provoqué vers la fin du XII^e siècle avant J.-C. des migrations qui ont débouché sur le peuplement des rivages occidentaux de l'Asie Mineure (Ionie) et des îles de la mer Égée.

Après une période de tyrannie et de colonisation du pourtour de la Méditerranée, une forme nouvelle d'organisation politique s'appuyant sur la communauté des citoyens s'est mise en place à l'aube du VIII^e siècle dans les cités, petits États autonomes qui composent la Grèce. Milet (en Ionie) a été la principale cité grecque jusqu'au VI^e siècle avant J.-C. Sparte et Athènes lui ont succédé. Après la conquête d'Alexandre le Grand (de 334 à 327 avant J.-C.), la puissance d'Athènes a décliné et la ville d'Alexandrie, en Égypte, est devenue la capitale du monde grec. La mort de la reine Cléopâtre (en 30 avant J.-C.) met fin à cette brillante civilisation : l'Égypte passe alors définitivement sous contrôle romain, la Macédoine et la Grèce ayant déjà été annexées en 146 avant J.-C. Alexandrie restera pourtant gardienne des traditions grecques jusqu'à sa prise par les musulmans en 640.

La connaissance des mathématiques grecques pose des problèmes de sources. Hormis quelques fragments de papyri alexandrins, nous ne disposons pas de manuscrits originaux. Les textes grecs nous sont parvenus sous forme de copies de copies, dont l'authenticité n'est pas garantie, de commentaires rédigés entre cinq cents et mille cinq cents ans après les originaux, de traductions arabes et de versions latines¹. Un des commentaires, celui de Proclus sur le Livre I des *Éléments* d'Euclide, semble

reproduire quelques fragments d'une histoire des mathématiques, composée par Eudème, disciple d'Aristote, au IV^e siècle avant J.-C. et perdue. C'est le seul témoignage que nous possédions sur les mathématiques pré-euclidiennes (antérieures au III^e siècle avant J.-C.).

On assiste en Grèce, vers le VI^e siècle avant J.-C., à l'éclosion d'une science positive, qui n'est pas simplement une collection de résultats empiriques comme dans les civilisations antérieures. En contact avec les peuples orientaux, Babylone et Égypte, les Grecs ne se contentent pas d'assimiler leurs connaissances, mais rendent les mathématiques abstraites et deductives. Les Grecs sont avant tout des géomètres.

Eudème cite Thalès de Milet comme fondateur de la géométrie grecque et mentionne aussi Pythagore, qui aurait changé la philosophie (la géométrie) en une forme de doctrine libérale, accessible à tous. Nous connaissons la période classique (de 600 à 300 avant J.-C.) surtout à travers les exposés synthétiques des grands géomètres, Euclide et Apollonius. Il semblerait qu'une période de découvertes sporadiques ait été suivie d'une ère d'inventions systématiques. Celles-ci ont débouché sur la rédaction d'éléments de géométrie regroupant logiquement tous les résultats antérieurs tout en ajoutant des recherches originales. Les *Éléments* d'Euclide, qui sont les seuls à nous être parvenus, étaient de loin les plus complets et les plus achevés, aussi bien sur le plan de la méthode que de la forme.

L'école d'Alexandrie (de 300 avant J.-C. à 640), dominée par des figures aussi prestigieuses que celles d'Archimède, de Ptolémée, de Héron et de Diophante, exploite les connaissances de la période classique et élargit le champ des mathématiques grecques en étendant ses investigations à la mécanique, à l'astronomie et à la trigonométrie et en renouant avec la tradition plus algébrique des Babyloniens.

Recherche mathématique et spéculation philosophique sont étroitement liées dans la Grèce antique. Platon (427-347 avant J.-C.), selon la légende de l'inscription : « *Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre* » à l'entrée de son école, fait d'une connaissance élémentaire de la géométrie la condition indispensable d'admission dans le cercle des disciples du philosophe. Il insiste sur la valeur éducatrice des mathématiques, discipline préparatoire ayant pour fin de conduire l'esprit à la contemplation des essences intelligibles.

Son disciple et rival, le Stagiritte Aristote (384-322 avant J.-C.), s'interroge lui aussi sur l'origine de la connaissance et les moyens d'approcher la réalité empirique (sensations, « faculté divine » permettant le passage de la sensation au raisonnement). Il codifie les lois du raisonnement dans la logique, organisatrice de la cohérence du discours, et en fait l'instrument d'une pensée capable de produire ses propres normes et d'imposer sa loi à la nature. Il élabore un corpus théorique global qui propose des explications qualitatives de l'ensemble des phénomènes naturels (cosmogonie, physique, lieux naturels vers lesquels reviennent toujours les corps, etc.). Ce corpus a été appelé philosophie naturelle.

L'œuvre d'Aristote n'a cessé d'inspirer la réflexion philosophique et nul n'a marqué autant que lui la pensée occidentale.

1. Un considérable travail d'édition a cependant été fait, et nous pouvons être à peu près sûrs que les textes que nous possédons sont conformes aux originaux.

La logistique grecque

La *logistique*, art de compter par opposition à l'*arithmétique* réservée à la théorie des nombres, est très compliquée en Grèce. Une inscription datant de 450 avant J.-C. témoigne de l'usage à Athènes du système attique de numération, système additif à base 10 qui comprend neuf symboles : I, II, III, IIII pour les quatre premiers chiffres, puis les lettres initiales Γ de *penta* (5), Δ de *deka* (10), Η de *hekatón* (100), Χ de *chilioi* (1000), et Μ de *myrioi* (myriade) pour 10000. Les autres nombres sont notés en formant des combinaisons des neuf symboles ci-dessus (cf. encadré 4).

4. Numération grecque

a) Dans le système attique :

ΓI = 6, F = 50, F = 5000, ΔΓ = 15, ΧΓ = 1005, ΧΧΦΗΔΓ = 2615.

b) Le système ionique utilise les symboles suivants :

α = 1	ι = 10	ρ = 100
β = 2	κ = 20	σ = 200
γ = 3	λ = 30	τ = 300
δ = 4	μ = 40	υ = 400
ε = 5	ν = 50	φ = 500
ς = 6	ξ = 60	χ = 600
ζ = 7	ο = 70	ψ = 700
η = 8	π = 80	ω = 800
θ = 9	ς = 90	η = 900

Dans ce système $\iota\alpha = 11$, $\xi\theta = 69$, $\rho\kappa\epsilon = 125$,

$\overline{\epsilon\upsilon\pi} = 5480$, $\overline{\eta\omega\alpha} = 8801$, $\overline{\gamma\omega\theta}$ ou $\overline{\gamma\omega\theta}$ = 3079

$\overline{M} = 3$ myriades = 30 000

$\overline{M,\epsilon} = 2$ myriades + 5 mille = 25 000

$\overline{\epsilon\upsilon\pi\delta M,\beta\rho\mu\eta} = 54\,842\,148$

$$L'' = \frac{1}{2}, \quad \alpha L'' = 1\frac{1}{2}, \quad \gamma L'' = 3\frac{1}{2}.$$

Diophante écrit $\frac{K\theta}{\iota\gamma}$ la fraction $\frac{13}{29}$ notée parfois $\iota\gamma K\theta''$ ou $\iota\gamma K\theta''K\theta''$, où le numérateur est marqué d'un accent, le dénominateur de deux accents. Le dénominateur est parfois répété.

$$\frac{\iota\gamma}{\rho\zeta} \text{ signifie } \frac{117}{13}, \quad \frac{\tau\kappa\zeta}{\sigma\iota\theta} = \frac{219}{327}.$$

Le système attique a progressivement été remplacé par le système ionique. Son utilisation s'est généralisée à Alexandrie (dès le III^e siècle avant J.-C.). C'est un système décimal de numération alphabétique, additif, non positionnel, formé des 24 lettres de l'alphabet grec (d'origine phénicienne) plus 3 autres signes (cf. encadré 4). Dans les papyri alexandrins apparaît un symbole pour le zéro : $\overline{\circ}$, $\overline{\circ}$, $\overline{\circ}$, $\overline{\circ}$.

Afin de distinguer les nombres des lettres qui les désignent, les Grecs ont pris l'habitude de placer une barre horizontale au-dessus des lettres.

Les neuf multiples de 1000 sont notés par les neuf premières lettres précédées d'un accent : 'α = 1000, 'δ = 4000, etc., les myriades par le symbole M surmonté ou précédé du symbole pour les multiples. Pour exprimer les nombres supérieurs à 10 000, les Grecs placent à droite du nombre de myriades les symboles de 1 à 9999.

Le système grec se prête difficilement à l'écriture des fractions. Il existait un symbole pour 1/2. Comme les Égyptiens, les Grecs furent tentés de n'utiliser que les fractions unitaires. Ils marquaient le dénominateur d'un accent : γ' = 1/3, κε' = 1/25 ou 20 $\frac{1}{5}$, selon le contexte.

D'autres tentatives furent faites, mais aucune ne réussit à s'imposer jusqu'à ce que Diophante (début de notre ère) introduise une notation non ambiguë : il place le dénominateur légèrement au-dessus du numérateur. Les astronomes alexandrins se rendent d'ailleurs compte de la supériorité du système babylonien d'écriture des fractions et adoptent dans leurs calculs les fractions sexagésimales.

Le système grec de numération étant trop compliqué pour effectuer facilement les opérations par écrit (cf. encadré 5), celles-ci le sont fréquemment sur une *abaque*, table sur laquelle des lignes parallèles figurent les unités, les dizaines, les centaines, etc. On y place un nombre de jetons correspondant aux unités, aux dizaines, etc., du nombre à représenter. L'abaque sera largement utilisée par les Romains et dans l'Occident médiéval chrétien, même après l'introduction de la numération décimale de position qui est la nôtre.

3. La civilisation arabe

Moins d'un siècle après la mort de Mahomet (en 632) et la chute d'Alexandrie (en 640), les anciennes tribus nomades d'Arabie unifiées par le prophète, puis sous l'égide de ses successeurs, les califes, ont conquis d'immenses territoires de l'Inde à l'Espagne, comprenant l'Afrique du Nord et l'Italie du Sud.

Cette progression ne s'essouffle qu'aux frontières de la Chine et ne subit que deux coups d'arrêt : à Constantinople en 717-718, où la flotte arabe est finalement repoussée par les Byzantins, et à Poitiers, en 732, où Charles Martel stoppe l'avancée arabe. L'immense empire musulman a d'abord Damas, en Syrie, pour capitale, mais il se scindera ensuite au VIII^e siècle en deux royaumes indépendants d'Orient et d'Occident.

5. Exemple d'une multiplication en numération grecque

Les Grecs disposent d'une table de multiplication 9×9 .

Pour multiplier $\lambda = 30$ par $\varphi = 200$, ils procèdent ainsi :

- λ est lu comme $\gamma (= 3)$ dizaines,
- γ est le radical du nombre, l'ordre de grandeur est la dizaine;
- φ est lu comme $\beta (= 2)$ centaines,
- son radical est β , l'ordre de grandeur est la centaine;
- le produit des radicaux est ς ;
- le produit des dizaines par les centaines donne des milliers;
- le résultat est donc $'\varsigma = 6000$.

On imagine la complexité du procédé lorsque les multiplicateurs sont des nombres un peu moins simples!

Voici l'exemple d'une multiplication effectuée par Eutocius dans son commentaire sur la *Mesure du cercle* d'Archimède :

$\beta \gamma \lambda \alpha$	Nous la noterions	$2911 \times$
$\beta \gamma \lambda \alpha$		2911
$\beta \gamma \lambda \alpha$		4000000
$\beta \gamma \lambda \alpha$		1800000
$\beta \gamma \lambda \alpha$		22000
$\beta \gamma \lambda \alpha$		1800000
$\beta \gamma \lambda \alpha$		819900
$\beta \gamma \lambda \alpha$		29110
$\beta \gamma \lambda \alpha$		2911
$\beta \gamma \lambda \alpha$		8473921

Dans les pays conquis, une fois passée la brève période de fanatisme religieux accompagnant l'expansion, les premiers nomades arabes découvrent une civilisation et une culture bien supérieures à la leur. Rapidement, ils s'assimilent les coutumes, les modes de pensée, les conceptions intellectuelles que les habitants de ces régions ont développés au cours des siècles précédents. Avec, dans l'ensemble, un esprit de tolérance et de libéralisme, ils s'intègrent aux communautés locales et, avec elles, entreprennent d'édifier une civilisation et une culture propres.

La civilisation arabe va donc prédominer du VII^e au XIII^e siècle sur cette immense aire géographique. En 1236, Cordoue, capitale de l'Occident musulman et centre de civilisation arabo-andalouse, est prise par Ferdinand III, roi de Castille, et, en 1258, Bagdad, capitale prestigieuse d'Orient, tombe sous les coups des Mongols. Mais la science arabe restera encore brillante au cours du XIV^e siècle : du côté de l'Occident dans le sud de l'Espagne (royaume de Grenade) et en Afrique du Nord, du côté de l'Orient dans l'empire des Mamluks d'Égypte et, pour de plus brèves périodes, autour des observatoires de Maragha et de Samarkand.

La science est une des institutions des cités musulmanes, dont certaines

deviennent de vrais foyers du savoir scientifique. Les mécènes la protègent, les califes se préoccupent de son essor. Ils fondent des académies, construisent des observatoires, envoient des émissaires à la recherche de manuscrits, constituent des bibliothèques.

Quand on parle de science arabe, il s'agit des œuvres scientifiques écrites dans cette langue, devenue pendant cette longue période la langue internationale des lettrés et des savants. Tout écrit, pour avoir portée et valeur dans les sciences, doit obligatoirement l'emprunter. L'effort scientifique a mobilisé tous les peuples conquis depuis les érudits grecs émigrés en Perse à la suite de l'oppression chrétienne, jusqu'aux Andalous et aux Berbères, en passant par les Syriens, les Juifs, les Sabéens, les Turcs, les habitants d'Asie centrale ou des bords de la Caspienne.

Or la langue arabe est d'une grande richesse; elle offre pour chaque notion, chaque objet concret, une grande variété de synonymes. Les traductions du grec, du syriaque ou du latin des ouvrages scientifiques antérieurs ont donc soulevé des questions de terminologie et d'identification des notions qui ont favorisé l'approfondissement conceptuel des connaissances; des philologues et des linguistes participent à cet effort.

Durant sept à huit cents ans, les Arabes sont les dépositaires du savoir, les promoteurs de la connaissance. Leurs savants font preuve d'une intense curiosité intellectuelle et d'un souci encyclopédique marqué. Le modèle de l'esprit universel versé dans plusieurs sciences devient le type ordinaire du savant arabe : philosophe, mathématicien, astronome, physicien, médecin et souvent aussi historien, géographe ou poète. La science arabe reste donc liée à la philosophie; parmi ces « savants-philosophes » trop mal connus de notre civilisation occidentale contemporaine, citons Al-Kindi, appelé le « philosophe des Arabes » (première moitié du IX^e siècle), Al-Farabi (870-950), et les deux très grandes figures d'Ibn Sina (ou Avicenne) et d'Al-Biruni, dans la première moitié du XI^e siècle.

Pour les philosophes arabes, le système d'Aristote plus ou moins modifié fournit encore les grandes lignes de l'architecture du monde et de l'explication des phénomènes. Mais, d'une part, l'interprétation du donné religieux islamique est restée assez vaste pour permettre à différentes doctrines philosophiques et théologiques de coexister et de s'affronter. Ainsi, bien que l'organisation de la connaissance soit en grande partie hellénistique, elle a donné lieu à plusieurs classifications des sciences (Al-Farabi, Al-Biruni) importantes dans l'histoire des idées; même quand ils commentent les Anciens, les philosophes repensent leurs principes et réorganisent le savoir. D'autre part, l'activité concrète des savants bouscule les classifications et fait voler en éclats la séparation des disciplines et l'indépendance de la théorie par rapport à ses applications.

L'armature de la pensée scientifique des Arabes est, elle aussi, héritière de la culture grecque : les grands maîtres de l'école d'Alexandrie, Euclide (mathématiques), Ptolémée (astronomie), Galien (médecine), restent les maîtres des Arabes. En mathématiques, les ouvrages d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Héron, de Diophante... sont l'objet d'études approfondies, de nombreuses traductions en arabe et de commentaires auxquels participent d'éminents savants comme Thabit ibn Qurra. Ce travail primordial va insuffler une vie nouvelle à ces œuvres.

Savants et mathématiciens arabes cités

- AL-KHWARIZMI. Abu Abdallah Muhammad Ibn Musa (né avant 800, mort après 847), Bagdad. Théorie des équations quadratiques. Théorie du système décimal.
- AL-KINDI. Le philosophe des Arabes de Basra. Enseigne à Bagdad (1^{re} moitié du IX^e siècle).
- AL-MAHANI. A Bagdad (né vers 860 - mort en 880). Exemple d'équation du troisième degré.
- THABIT IBN QURRA DE HARRAH. Traduit les *Éléments*, et d'autres ouvrages, à Bagdad. Mathématicien. Astronome.
- AL RAZI (ou RHAZES). Deuxième moitié du IX^e siècle - mort en 923. Originaire de Ray (près de Téhéran). Puis établi à Bagdad. Grand clinicien. Alchimiste et physicien.
- AL-FARABI. Première moitié du X^e siècle. Originaire du Turkestan. Puis établi à Damas et Alep. Philosophe et savant.
- ABU-KAMIL. (Né vers 850, mort vers 930.) Le Caire. Poursuit l'algèbre d'Al-Khwarizmi.
- UL-UQLIDISI. Premier exposé des fractions décimales.
- AL-KHAZIN. (Mort entre 961 et 971.) Du Khorassan. Résout l'équation cubique d'Al-Mahani par sections coniques. Travaux d'« analyse diophantienne » entière.
- ABU L'WAFI (AL'BUZJANI). *Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands* (vers 970). Trigonométrie.
- AL-KHUANDI. (Mort en 1000.) Théorème du sinus relatif aux triangles sphériques.
- AL-BIRUNI. (Né en 973 - mort en 1050) né à Khwarizm. Astronome, mathématicien, géographe, historien, physicien.
- IBN-SINA (dit AVICENNE). (Né en 980 - mort en 1037.) Né près de Boukhara. Grand esprit universel. Philosophe, astronome, physicien et médecin.
- IBN-AL-HAYTHAM. (Connu sous le nom d'Alhazen.) (Né en 965 - mort vers 1040 au Caire.) Astronome. Mathématicien. Traité d'optique. Le plus célèbre physicien du monde arabe.

Mais les Arabes savent aussi assimiler avec bonheur les apports indiens, dont le plus notable est la numération décimale de position avec usage du zéro. Celle-ci va être popularisée par les traités du célèbre Al-Khwarizmi, mais elle subsistera très longtemps sous la forme littérale à côté des deux systèmes de chiffres arabes d'Orient et d'Occident apparus au cours du X^e siècle.

La contribution des mathématiciens arabes est absolument décisive dans le domaine de l'algèbre, qu'ils constituent comme discipline autonome. Elle est à la fois une science théorique, une technique algorithmique et un art du calcul. Citons les noms prestigieux, parmi tant d'autres, d'Al-Karaji, d'Al-Khayyam, d'Al-Kashi... (cf. chapitre 3).

La méthode expérimentale apparaît dans la science arabe, en particulier

- KUSHYAR IBN LABBAN. (1000 environ), originaire du sud de la Caspienne et AL-NASAWI du Khorassan : mathématiciens.
- AL-KARAGI (ou AL-KARKHI). Bagdad (fin du X^e siècle - début du XI^e siècle, mort entre 1019 et 1029). *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique*. Livre d'algèbre, *Al Fakhri*.
- AL-ZARQALI. (Deuxième moitié du XI^e siècle), astronome de Cordoue.
- AL-KHAYYAM (ou OMAR KHAYYAM). [Né vers 1048, mort en 1131?] de Nishapur. Mathématicien, astronome, philosophe, poète. Théorie géométrique des équations cubiques.
- AL-KHAZIN. (Productif vers 1115-1130.) Astronomie, mécanique, instruments scientifiques.
- AL-SAMAW'AL. (Mort en 1174.) Poursuit l'œuvre d'Al-Karagi. Traité *Al-Bahir*. Fractions décimales.
- IBN BAJJA (Avenpace). Philosophe. Engage une critique du système de Ptolémée d'un point de vue aristotélicien.
- AVENZOAR. Grand médecin.
- IBN RUSHD (ou Averroès). Philosophe, astronome, médecin.
- SHARAF AL-DIN AL-TUSI. (Prod. 1213-14.) Traité d'algèbre : *Des équations*. Astronomie, mathématiques.
- NASIR AL-DIN AL-TUSI. (Né en 1201 en Perse, mort en 1274 près de Bagdad.) Astronome, mathématicien, logicien, philosophe, poète. Trigonométrie : *Traité du quadrilatère complet, Recueil d'arithmétique à l'aide du tableau et de la poussière*. Dirige l'observatoire de Maragha (Azerbaïdjan).
- IBN AL-BANNA. (1256-1321 - Maroc). Mathématicien et astronome, auteur du *Talkhis*.
- KAMAL AL DIN AL-FARISI. (Mort à Tabriz en 1320.) Optique, mathématiques.
- AL-KASHI. (Né à Kashan en Iran, mort à Samarkand en 1429.) Mathématicien et astronome, auteur de la *Clef de l'arithmétique* (1427), du *Traité sur la circonférence du cercle* et du *Traité sur la corde et le sinus* (non retrouvé).
- QADI-SADA AR-RUMI. Astronome (observatoire de Samarkand).
- AL-QALASADI. Mathématicien d'Afrique du Nord.

en mécanique, et surtout en astronomie, où elle enregistre les progrès les plus nets. De nombreux traités sur la fabrication des instruments (astrolabes, quadrants...) sont écrits. Le plus grand physicien de l'époque médiévale, Ibn Al-Haytham, dit aussi Alhazen (965-1039), combine la géométrie et la physique pour rédiger son *Traité d'optique* (*Kitab al manazir*), qui fonde cette discipline, et aura une influence déterminante jusqu'au XVII^e siècle. Enfin, une médecine empirique se développe dans les hôpitaux.

Partout, les Arabes manifestent un souci de l'observation; de la description (botanique, zoologie, chimie, géographie...) et de la mesure exactes (tables astronomiques)

Une science véritablement opératoire est en germe dans leur civilisation.

L'Occident médiéval chrétien, que nous allons maintenant aborder, mettra plusieurs siècles à assimiler cet héritage et à atteindre le même niveau.

4. Le Haut Moyen Age chrétien

Très longtemps s'est colportée en Occident une vision caricaturale de l'histoire du développement scientifique : après le « miracle » grec, dix siècles d'ignorance, d'obscurantisme et d'oubli des joyaux théoriques de la pensée hellène, leur brusque redécouverte par les humanistes de la Renaissance aurait enfin permis l'émergence de la science moderne.

La richesse intellectuelle et scientifique de la civilisation arabe prouve déjà l'inanité d'une telle vision. De plus, tous les chercheurs-historiens et médiévistes réfutent aujourd'hui l'homogénéité de cette longue période allant de la chute de l'Empire romain d'Occident, en 476, à la prise de Constantinople par les Turcs, en 1453, et qu'on appelle Moyen Age.

En fait, les premiers siècles (du VI^e au X^e) se rapprochent de cette sombre description. Après la chute de Rome, l'Europe voit s'ouvrir une ère de récession économique et de désordre politique; c'est l'époque des grandes invasions, immenses mouvements migratoires qui ne favorisent aucune cohérence organique, aucune stabilisation culturelle propices à l'activité intellectuelle. L'Europe se trouve pratiquement sans contacts avec l'Empire romain d'Orient.

Seuls quelques auteurs latins du V^e et du VI^e siècle, comme Boèce, Isidore de Séville ou Bède le Vénérable, écrivent quelques textes de nature mathématique fondés sur des textes grecs néo-pythagoriciens (Nicomaque de Gérase en particulier) qui mettent l'accent sur l'art de compter et la mystique des nombres.

Pourtant quelques contacts ont lieu entre les brillantes cours des califes musulmans et les cours d'Europe : on peut citer les cadeaux du calife de Bagdad à Charlemagne, les ambassades envoyées à Cordoue par Charles le Chauve et par Otton I^{er} (empereur germanique de 936 à 973).

5. Les premières infiltrations

La première personnalité qui va modifier sensiblement cette situation par ses contributions est Gerbert (940-993), tour à tour précepteur et conseiller de l'empereur Otton III, futur pape Sylvestre II (en 999). Gerbert voyage en Espagne entre 967 et 969 et y fréquente les écoles arabes. C'est là qu'il aurait appris le système de numération indo-arabe. En France, on comptait encore de façon digitale ou par le système de jetons. Gerbert aurait construit une table à calcul ou *abaque* dans laquelle il aurait remplacé dans chaque colonne le nombre de jetons par un seul *apice* portant au dos le nombre de jetons substitués. C'est ainsi qu'il aurait introduit les chiffres arabes en Europe. La méthode des *abacistes*, dont Gerbert serait le promoteur, présente des facilités analogues à notre arithmétique de position, du moins pour l'addition et la soustraction, car la multiplication et surtout la division restaient très compliquées.

Progressivement, au cours du XI^e et du XII^e siècle, grâce à l'intervention des Juifs en Europe, on se mettra à faire les opérations comme les Arabes, en

les traçant sur du sable et de la poussière. L'abacisme fera place à l'*algorithme*, qui, lui, utilise le zéro et la méthode arabe de division et d'extraction de la racine carrée. Ces nouveaux procédés de calcul s'avèreront, en particulier quand on se rappelle les complications de la logistique grecque, un des apports capitaux pour la préparation intellectuelle de la science en Occident.

Dès cette période, l'Italie méridionale jouit d'une situation privilégiée : la culture latine autochtone s'allie aux vestiges d'une longue occupation byzantine, tandis que la proximité des Arabes, maîtres de la Sicile, crée des liens avec leur civilisation. L'école de Salerne, principalement tournée vers la médecine fut célèbre et des cours y étaient donnés en quatre langues : l'arabe, l'hébreu, le latin, le grec. Constantin l'Africain, ancien marchand de Carthage converti au christianisme, aurait réuni des manuscrits pour les ramener à Salerne; finalement, il rédige des œuvres en latin qui sont des traductions inavouées que l'on identifie aujourd'hui à des ouvrages arabes. On assiste ainsi aux toutes premières infiltrations de la science arabe en Occident.

6. La toute-puissance de l'Église

Les XI^e et XII^e siècles sont une période d'éveil pour l'Europe; la civilisation s'est stabilisée, une poussée démographique générale conduit au défrichement de nouveaux sols et au développement des villes. Bien que la société reste largement féodale, on assiste à la formation de groupes de marchands indépendants, à des débuts d'industrie, à l'accroissement de la circulation monétaire, à une montée encore lente du commerce.

C'est l'époque de la toute-puissance de l'Église, de ses ordres monastiques, qui seront les premiers centres culturels de l'Occident chrétien. L'Église met en chantier de majestueuses cathédrales, ouvre les premières écoles. Le latin, sa langue officielle, devient la langue des érudits avant d'être bientôt la langue scientifique européenne.

Mais jusqu'en 1100, la pensée chrétienne, appuyée sur l'autorité des Pères de l'Église, dont saint Augustin (354-430) est le plus célèbre, entretient un climat indéfini fait de dogmatisme, de mysticisme et de servilité vis-à-vis des paroles consacrées.

Les doctrines sur le péché, l'enfer, le salut sont dominantes, et l'étude ou l'observation de la nature n'ont pas leur place dans ce projet quasiment exclusif de préparation à la vie post-terrestre.

A partir de 1100, l'atmosphère commence à évoluer. Une approche plus raisonnée des phénomènes est recherchée, privilégiant davantage les explications en termes de causes naturelles au détriment des explications moralistes, en termes de vérités révélées. L'intérêt pour le *quadrivium* (arithmétique, géométrie, astronomie, musique) grandit, alors que jusque-là seul le *trivium* (grammaire, logique, rhétorique) avait eu la faveur des érudits scolastiques.

Cet effort porte ses tout premiers fruits dans l'École de Chartres. Celle-ci, fondée au début du XI^e siècle par un disciple de Gerbert, l'évêque Fulbert, réunit plusieurs personnages (Gilbert de la Porée, Thierry de

Chartres, Bernard Sylvester) qui éprouvent un certain besoin de rationalité dans la description de la nature : c'est le cas en particulier de l'ambitieuse cosmogonie mécaniste de Thierry de Chartres.

Tout cela reste fort modeste et passe relativement inaperçu. Au cours du XII^e siècle, les facteurs les plus importants des changements futurs viennent du sud de l'Europe, où la science arabe et la science grecque, par son intermédiaire, se fraient des voies de passage.

7. Le siècle des grandes traductions

A partir du XII^e siècle, les Européens se doivent de franchir la barrière linguistique de la langue arabe pour pouvoir accéder directement à leur culture scientifique et pouvoir l'apprécier, comme quelques siècles plus tôt les Arabes avaient dû le faire à propos de la langue et de la civilisation grecques. Le XII^e siècle sera celui des grandes traductions.

Les deux principales voies culturelles de traduction pour l'Europe sont la Sicile et l'Espagne. La Sicile l'est pour les mêmes raisons favorables évoquées ci-dessus à propos de l'Italie méridionale du XI^e siècle.

Un des premiers traducteurs est Adélarde de Bath (1075-1160), originaire d'Angleterre, qui y séjourne et voyage aussi à Jérusalem, à Damas et à Bagdad. Ses principales traductions latines sont les tables astronomiques d'Al-Khwarizmi, les *Éléments* d'Euclide, traduction dont s'inspirera au siècle suivant Campanus de Novare, et l'*Almageste* de Ptolémée.

Quant à l'Espagne, on y rencontre à cette époque de très grands savants comme Ibn Rushd, alias Averroès, philosophe, astronome et médecin — disciple et commentateur d'Aristote, Averroès aura une grande influence dans l'évolution de la scolastique —, Maïmonide, un juif de Cordoue talmudiste et philosophe mais aussi pharmacologue, médecin et astronome, ou Ibn Zuhr, dit Avenzoar, un des plus grands médecins depuis Galien. L'Espagne devient le plus grand centre culturel où l'on vient puiser aux sources arabes et retrouver la science grecque.

De véritables écoles de traduction fonctionnent comme à Tolède, ville dominée par les Arabes pendant des siècles, et qui venait de tomber aux mains des chrétiens. Les traductions se font non à l'aide de dictionnaires mais par la collaboration de plusieurs personnages : l'un juif, traduisant de l'arabe à la langue vulgaire, l'autre souvent chrétien mettant en forme, latine, la première traduction. Les juifs sont d'ailleurs tantôt traducteurs, tantôt auteurs originaux en arabe ou en hébreu.

Citons, parmi d'autres, Pierre Alphonse (ou Moses Sephardi), protégé d'Alphonse d'Aragon et médecin d'Henry I^{er} d'Angleterre; Jean de Séville, juif converti au christianisme; Savasorda (ou Abraham bar Hiyya, de Barcelone), qui rédige une œuvre considérable en hébreu, composée pour initier à la science arabe les communautés juives du sud de la France. En particulier, Savasorda compose le *Liber embadorum*, traduit en latin en 1145 par Platon de Tivoli, qui est le premier livre dans cette langue traitant des équations du second degré et dans lequel puisera Léonard de Pise. Robert de

Chester effectue une traduction populaire de l'*Algèbre* d'Al-Khwarizmi qui marque le début de l'algèbre européenne.

Enfin, le traducteur le plus fécond est sans conteste Gérard de Crémone, né à Crémone en 1114, mort à Tolède en 1187. On connaît plus de quatre-vingts ouvrages traduits par Gérard et ses « associés » à Tolède, car il fallait rassembler un grand nombre de textes, les attribuer, les classer, puis les recopier, etc. On y trouve la plupart des grands classiques grecs traduits de l'arabe : une version des *Éléments* révisée par Thabit ibn Qurra, Archimède, Apollonius, Ménélaüs, Ptolémée, Hippocrate, Galien, plusieurs traités d'Aristote (*Du Ciel et du Monde, De la Génération et de la Corruption, la Physique*, les trois premiers livres des *Météorologiques*...). On y trouve aussi les œuvres des grands philosophes arabes Al-Kindi, Al-Farabi, le *Canon* d'Avicenne, celles des mathématiciens, physiciens et astronomes Al-Khwarizmi, Thabit ibn Qurra, Ibn al Haytham... du médecin Al Rāzi, etc.

Gérard de Crémone apporte une contribution décisive à l'essor de la science médiévale.

8. L'époque de Léonard de Pise (Italie, Espagne)

Au XIII^e siècle, la réception de la culture arabe se fait moins passive et on assiste à un début d'activités créatrices. En Sicile, l'empereur Frédéric II (1194-1250) entretient une correspondance scientifique internationale avec des souverains orientaux sur divers problèmes de géométrie, d'astronomie, d'optique et de philosophie. Il se livre à d'étranges et cruelles expériences, mais organise aussi des « tournois » au cours desquels philosophes et savants se proposent des problèmes. Parmi eux, le plus grand mathématicien de tout le Moyen Âge chrétien : Léonard de Pise, ou Fibonacci (né vers 1170 - mort après 1250).

Né à Pise, centre commercial actif, le jeune Léonard part avec son père à Bougie, en Algérie. Il y apprend l'arithmétique et la langue arabe dans la boutique d'un épicier et acquiert le goût des mathématiques. L'exercice du commerce et la recherche de manuscrits le porteront en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile. A son retour, il compose en 1202 son célèbre *Liber abaci*, véritable encyclopédie qui, jointe à *Practica geometriae*, écrite en 1220, va initier les savants italiens du XIII^e siècle à la science mathématique des Arabes et des Grecs et permettre à plus long terme les progrès de l'algèbre dans l'Italie de la Renaissance.

Le *Liber abaci* s'ouvre sur les neuf symboles indiens de numération ainsi que sur le signe zéro, dont le nom vient de *zephyrum*, forme latine de l'arabe *sifr*. Il y traite de tous les problèmes d'applications financières et commerciales, de la résolution d'équations du second degré, d'équations indéterminées, des calculs à effectuer avec des radicaux, etc. Le *Liber abaci* s'inspire des *Éléments* d'Euclide, d'Héron d'Alexandrie, du livre de Savasorda, d'Al-Khwarizmi et, surtout, il semble très vraisemblable que Léonard de Pise ait connu l'*Al-Fakhri* d'Al Karagi et l'école arabe des algébristes-arithméticiens (cf. chapitre 3). Son *Liber abaci*, d'un niveau trop élevé pour l'époque, ne fut pas utilisé dans les écoles.

La péninsule Ibérique, toujours sous une forte influence judéo-arabe, poursuit une évolution indépendante du reste de l'Europe, à l'écart de la scolastique. On y établit à des fins astronomiques des tables numériques précises dont les plus célèbres sont les *Tables alfonsines*, du nom du roi de Castille Alphonse X (1252-1284). Elles jouiront jusqu'au XVI^e siècle d'une grande notoriété. La médecine, pratiquée surtout par les juifs, s'y développe, ainsi qu'en Provence.

9. L'âge d'or de la scolastique

Le XIII^e siècle dans l'Europe non méridionale est l'âge d'or de la *scolastique*. Aujourd'hui, ce mot fait naître irrésistiblement l'idée de répétition, de commentaire du déjà dit, de discours formel, conventionnel et abstrait, par opposition à l'esprit d'originalité, de découverte et d'enquête sur les choses elles-mêmes qui est synonyme de l'esprit scientifique. Cette acception courante s'est d'ailleurs développée à partir de la critique virulente de certains hommes de la Renaissance, comme Érasme de Rotterdam, contre l'esprit du Moyen Âge.

On a appelé scolastique une méthode particulière de spéculation théologique et philosophique marquée d'une forte intention didactique — dans scolastique, il y a école — et qui s'est caractérisée par des formes intellectuelles et littéraires qui lui sont propres : les *Commentaires*, les *Questions disputées* et les *Sommes*.

Mais la scolastique est aussi dépendante de la forme institutionnelle dans laquelle elle s'inscrit : l'université. La fondation des universités (Paris, Oxford, Montpellier, les universités italiennes, plus tard Vienne...) date du début du siècle. Elle est significative du développement urbain et marque un relâchement du système féodal, l'université bénéficiant de franchises qui la mettent hors du contrôle des autorités civiles.

Une université regroupe des facultés spécialisées : faculté de théologie, facultés de droit et de médecine, faculté des arts où l'on enseigne les autres sciences, cette dernière étant l'étape obligatoire avant de préparer une licence de théologie. L'université confère le droit d'enseigner : c'est le lieu où le corps professoral travaille, recrute des disciples, se perpétue. Les ordres monastiques y sont dominants; ils relèvent non des autorités ecclésiastiques locales mais directement de la papauté et peuvent passer d'une université à une autre sans considération de frontières. Pourtant, les principales universités garderont des spécificités durables : Paris sera le fief des dominicains, plutôt aristotéliens et naturalistes; Oxford celui des franciscains, plus strictement attachés au platonisme augustinien et favorables aux mathématiques.

Quant au programme scolastique, il vise à la systématisation des vérités révélées, à la mise en lumière de l'intelligibilité de la foi chrétienne, à sa défense, mais par l'utilisation de principes et d'instruments rationnels. Les textes auxquels cette méthode d'exégèse va s'appliquer sont les *Saintes Écritures*, les quatre *Livres de sentences* — dans lesquels Pierre Lombard avait rangé vers 1150 l'ensemble des données et des problèmes de la foi

chrétienne tels qu'ils avaient été compris et discutés par l'Église —, enfin, et cela est l'élément nouveau de ce XIII^e siècle, l'œuvre profane d'Aristote et ses commentaires les plus fameux comme ceux d'Averroès.

En effet, l'œuvre d'Aristote s'est lentement et sûrement diffusée depuis sa traduction en latin et imprègne profondément la pensée chrétienne. On assiste à une véritable renaissance de la philosophie antique qui ne va d'ailleurs pas sans problèmes. La pensée d'Aristote séduit et inquiète à la fois. D'une part, elle fascine par l'ampleur de ses vues, la cohésion logique de son système, l'universalité de ses explications. D'autre part, cette pensée païenne est en contradiction sur plusieurs points avec le christianisme (éternité du monde, fatalisme astrologique...) et provoque des rejets.

Dans l'université de Paris, capitale intellectuelle de la chrétienté, les interdits ecclésiastiques frappant l'enseignement d'Aristote ne tombent en désuétude qu'au milieu du siècle et, en 1253, la philosophie naturelle d'Aristote fait son entrée à la faculté des arts; la faculté de théologie restant gardienne de l'orthodoxie. Elle renouvelle la physique, l'astronomie, la physiologie et la logique. Elle provoque un réexamen du savoir et un réajustement des manuels scolaires; les fables allégoriques et mystiques sont progressivement exclues.

Mais la redécouverte d'Aristote ne va pas toujours, tant s'en faut, dans le sens d'un éveil de l'esprit scientifique. Le dilemme entre philosophie naturelle et foi chrétienne est diversement réglé. Albert le Grand (1206-1280) tente de les juxtaposer. Connaissant très bien les sciences grecque, latine et arabe, il fut un érudit et un professeur réputé. Excellent observateur, dépourvu de la servilité par rapport à la pensée du Stagirite, trop courante par ailleurs, il a la volonté d'étudier la nature pour elle-même suivant le principe que « l'expérience seule donne la certitude ». Il décrit minutieusement la faune et la flore d'Allemagne. Mais il ne dégage pas de méthode générale et ne systématise pas les recherches concrètes qu'il effectue.

Thomas d'Aquin propose une vaste synthèse entre l'aristotélisme et la théologie dans ses *Summa contra gentiles* et *Summa theologica*.

A Oxford, Robert Grosseteste (1175-1253), évêque de Londres, philosophe de la nature, exprime, face aux grandes explications d'Aristote, le besoin de confrontation avec les faits, et son disciple Roger Bacon (1214-1294) pousse plus loin la révolte : ses connaissances très étendues, en particulier de l'œuvre d'Ibn Al-Haytham, l'orientent vers une reconnaissance du rôle primordial des mathématiques. Il prétend expliquer tous les phénomènes par des lignes, des angles, des figures géométriques simples et sa cosmogonie place l'optique au-dessus des autres disciplines, la lumière y jouant le rôle essentiel.

Enfin, les théories de la *Physique* sont le point de départ d'investigations sur le mouvement, le changement : Jordanus Nemorarius étudie le levier et les plans inclinés. Ces théories porteront les fruits les plus féconds au siècle suivant.

Ainsi, à la fin du siècle, la nécessité d'observations concrètes de la réalité renaît, les invraisemblances et les aberrations d'Aristote sont notées, mais les résultats restent décevants : quelques fictions séduisantes mais pas encore de vraies recherches originales.

Le Bas Moyen Age

Le XIV^e siècle est un siècle plus critique que le précédent : aux difficultés politiques et économiques occasionnées par la guerre de Cent Ans s'ajoutent celles d'une décennie de très mauvaises récoltes et surtout les calamités de la Grande Peste (1347-1348), qui tue près du tiers de la population européenne et frappe durement les ordres monastiques.

Les masses ne voient d'autre recours qu'en l'adhésion au mysticisme et à toutes sortes de superstitions. Du côté des élites intellectuelles, les universités sont plus décadentes, mais la critique contre les formes de classicisme conventionnel du siècle précédent se fait plus nette. Quelques pensées originales émergent.

Alors que chez Aristote les mathématiques sont défavorisées par rapport à la physique, discipline conçue comme essentiellement qualitative et descriptive, l'émancipation par rapport à l'aristotélisme est très sensible au XIV^e siècle dans les écoles d'Oxford et de Paris.

Leurs théoriciens, dont les plus prestigieux sont T. Bradwardine à Oxford, Jean Buridan et Nicole Oresme à Paris, commencent à considérer les mathématiques comme la médiation indispensable dans l'étude des phénomènes naturels en y introduisant des considérations quantitatives.

Jean Buridan, recteur de l'université, bâtit toute une mécanique appelée plus tard *physique de l'impetus*. Cette théorie, même encore teintée de l'influence d'Aristote et d'Avicenne, provoque néanmoins de nouvelles recherches. L'apport de ces théoriciens de l'«intensité des formes» constituant un moment théorique important vers la mathématisation des lois de la nature, on se reportera à notre étude du chapitre 6.

La science devient, en ce bas Moyen Age, moins spéculative, stimulée davantage par le développement des techniques et la vie pratique; c'est l'époque des premières armes à feu (1337), du système bielle-manivelle, du perfectionnement des forces motrices (animale, hydraulique, éolienne), de celui des techniques de distillation, des horloges mécaniques à poids, etc. Enfin, les grandes découvertes élargissent tous les horizons.

10. Le Cinquecento et les nouvelles aspirations scientifiques

En Italie, dès le début du xv^e siècle, les contacts avec les civilisations orientales se multiplient. A la recherche d'aide contre les Turcs, Byzance se rapproche de l'Occident et de Venise en particulier. Les navires vénitiens sillonnent alors les mers et les riches marchands de la cité des doges entretiennent un commerce actif avec les villes portuaires du Moyen-Orient. Ils financent l'équipement d'expéditions qui partent à la découverte de nouvelles routes commerciales et tentent d'intensifier les liens avec d'autres civilisations. Par sa situation géographique, l'Italie, tête de pont vers l'Orient, jouera un rôle particulier dans la «renaissance» de la culture occidentale. De là, le regain d'activité intellectuelle va progressivement gagner les autres États d'Europe.

Après la chute de l'Empire romain d'Orient et l'afflux des savants byzantins en Occident, on dispose de versions grecques des textes anciens. Cela impulse un réexamen et une étude critique des traités grecs et des traductions déjà existantes.

Parallèlement à l'assimilation de la science grecque se développe un mouvement réclamant une réforme des méthodes scientifiques. Nicolas de Cues (1405-1464), homme d'Église allemand consacrant quelques loisirs aux mathématiques, regrette l'incapacité de la science scolastique de « mesurer », et son idée de fonder toute connaissance sur la mesure annonce le développement de la science moderne.

Léonard de Vinci (1452-1519), dont on ne manque jamais de souligner l'universalité et le génie technologique, fait de l'observation le mode privilégié de connaissance et cherche, sous l'influence du Cuesain, à exprimer les lois de la nature sous forme de relations quantitatives. Il méprise l'érudition livresque et la spéculation, prône une approche empirique et intuitive et a le goût du concret et de l'action immédiate.

Pendant que ces réformateurs de la science prêchent l'observation de la nature et réclament des faits expérimentaux, les artisans, les ingénieurs et les artistes, plus orientés vers la pratique, accumulent des expériences, s'interrogent sur la nature des phénomènes qu'ils rencontrent et acquièrent peu à peu un riche savoir empirique. Celui-ci se développe dès le xv^e siècle sous la protection des princes.

L'Europe est alors fragmentée en de nombreux petits États bouleversés par de multiples changements politiques et par des guerres incessantes. Les princes à leur tête sont riches et puissants et multiplient les travaux civils et militaires. Ils attirent à leurs cours des architectes et des ingénieurs et les chargent de résoudre les problèmes techniques que posent ces entreprises. Souvent incapables de comprendre les théories archimédiennes en mécanique, hydrostatique, etc., ces praticiens retrouvent les anciens résultats dans les domaines dont ils ont besoin et en ajoutent de nouveaux.

Hommes universels par les tâches qui leur incombent — conception de fortifications, construction de ponts, aménagement des villes, invention de machines de guerre, etc. —, ils sont artistes également. Or l'observation de la nature a pour corollaire sa représentation fidèle. Aussi les artistes du Cinquecento mettent-ils au point un système de règles permettant de reproduire l'espace réel dans un plan : les règles de la perspective. F. Brunelleschi, L. B. Alberti, Léonard de Vinci et Piero della Francesca en sont les protagonistes. Albert Dürer diffuse en Allemagne la pratique de la perspective, qu'il a apprise lors d'un séjour en Italie, et en expose les principes dans son célèbre *Underweysung der Messung...* (« Instructions sur la mesure au compas et à l'équerre », 1525).

11. La diffusion des idées neuves au XVI^e siècle

La diffusion des idées nouvelles semble avoir été relativement lente. Les universités, conservatrices, détenaient le monopole en matière d'enseignement et restaient fidèles aux doctrines scolastiques.

Le savant de la Renaissance est toujours un homme seul. La communauté scientifique est inexistante. A la solde d'un mécène, le savant doit rester mobile afin de suivre l'appel de ses protecteurs. Obligé de vendre ses services aux princes, toujours à la merci d'une disgrâce, il garde jalousement ses découvertes. L'échange avec les autres savants se réduit souvent à la rivalité et au défi.

L'invention de l'imprimerie par Gutenberg, en 1434, aurait dû accélérer la diffusion des connaissances nouvelles, mais celles-ci n'étaient pas toujours livresques, et la fabrication d'un livre coûtait cher. A ses débuts, l'imprimerie a eu beaucoup de difficultés à s'imposer contre la puissante organisation des copistes, qui avait mis sur pied une véritable industrie des manuscrits. Le livre imprimé présente néanmoins des avantages sur le manuscrit et, vers la fin du XV^e siècle, la production de livres augmente. Des presses de Venise seules sortent plus de livres que n'en mettent en circulation tous les copistes de l'Europe réunis.

Accessibles à une petite minorité de personnes seulement, les textes scientifiques n'étaient pas parmi les premiers à être mis sous presse. Il faut attendre 1482 pour voir paraître une première édition des *Éléments* d'Euclide à partir de la traduction latine de Campanus de Novare (XIII^e siècle). Apollonius et Archimède ne seront imprimés qu'au XVI^e siècle. Publiés en latin, ces ouvrages n'étaient pas à la portée de tous. La langue était un obstacle considérable à la diffusion rapide des connaissances, et, plus tard, Pacioli, Galilée et Descartes choisiront délibérément d'écrire en langue vulgaire (italien, français).

Enfin, la forme des traités de géométrie grecs ne correspondait pas tellement au goût des savants occidentaux, la nature de l'algèbre et de l'arithmétique arabes répondait mieux à leurs préoccupations.

12. Premiers progrès : arithmétique et algèbre

Le renforcement des échanges entre États, le développement du commerce et du système bancaire — Venise était le centre financier de l'Europe — nécessitent une arithmétique simple à manipuler et facile à appliquer. Les premiers manuels paraissent alors pour répondre au besoin de formation des marchands, des banquiers, des artisans, etc. La *Summa* (1494), de Luca Pacioli, véritable somme du savoir mathématique de l'époque, a eu une grande influence. elle reprend dans l'ensemble le *Liber abaci* (1202) de Léonard de Pise. Par ailleurs, des bibliothèques publiques sont créées par les princes (par les Médicis à Florence, par le pape à Rome...).

La floraison de manuels est en Allemagne à l'origine d'une véritable école algébrique qui joue un rôle non négligeable dans la mise en place d'une notation symbolique commode.

L'école italienne n'est pas moins active. Elle s'attaque au problème de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré et le résout finalement après des rebondissement spectaculaires alimentés par le goût du défi et du secret (cf. chapitre 3).

Outre les progrès de l'algèbre, qui s'est développée dans le droit fil de la

tradition arabe, le savoir mathématique ne s'est pratiquement pas enrichi pendant la Renaissance. Pourtant, l'élaboration par les artistes d'une pratique de projection prépare déjà le terrain du renouvellement de la géométrie. De façon générale, les développements scientifiques nécessités par la résolution des problèmes technologiques auxquels étaient confrontés les savants-ingénieurs ont créé des conditions favorables à l'essor prodigieux de la science au XVII^e siècle. Le bouleversement de l'ancienne cosmologie par Copernic et Kepler en est un élément déterminant.

13. La réforme de l'astronomie. Copernic

Depuis la redécouverte de la science grecque, les théories cosmologiques aristotélicienne et ptoléméenne, augmentées et modifiées par les Arabes, étaient bien connues en Occident. Les scolastiques adoptaient l'astronomie d'Aristote tout en essayant de mieux l'adapter aux exigences de la théologie. La théorie plus mathématique de Ptolémée, considérée comme une simple hypothèse ne décrivant pas nécessairement la réalité, servait surtout pour les besoins concrets de la navigation, du calcul du calendrier, etc.

L'esprit de révolte qui souffle pendant la Renaissance est dirigé contre l'autorité conjointe d'Aristote et de l'Église. Il se nourrit des critiques que certains humanistes portent contre la doctrine catholique, des divergences entre l'observation et les théories scolastiques, du mécontentement suscité par les abus du clergé. La scission de l'Église après la Réforme protestante est en général bien accueillie et applaudie comme un moyen d'affaiblir son pouvoir. Le protestantisme sait séduire maints hommes de la Renaissance en privilégiant le jugement individuel au détriment de l'autorité papale.

Le renouveau de l'astronomie, qui participe de cette révolte contre Aristote et la scolastique, est préparé par une nouvelle traduction, du grec en latin, de *l'Almageste* de Ptolémée entreprise par Georg Peurbach et son élève Regiomontanus. Cette réédition (1515) provoque de nombreuses discussions sur le système ptoléméen dans les universités. Elles sont suivies de la résurgence de systèmes pré-ptoléméens, puis, en 1543, du *De Revolutionibus orbium caelestium* de Nicolas Copernic (1473-1543). Celui-ci démontre l'inexactitude du système ptoléméen suivant lequel la Terre occupe le centre du monde, et défend l'idée révolutionnaire que la Terre est en mouvement autour du soleil. Chanoine de la cathédrale de Frauenburg, Copernic laisse longuement mûrir ses idées et hésite trente ans avant de mettre son manuscrit sous presse.

Copernic place le Soleil au centre de l'Univers et dispose autour de lui les centres des orbites planétaires, sphères matérielles qui portent les planètes et qui, de par leur forme sphérique, vont tourner autour d'elles-mêmes. Les mouvements des astres se trouvent rapportés au centre de l'orbite terrestre et le tout est contenu dans la sphère des étoiles fixes.

Si la technique mathématique de Copernic est identique à celle de Ptolémée, la supériorité de son système réside surtout dans l'uniformisation et la systématisation des mouvements : il est exclusivement fondé sur le principe du mouvement circulaire uniforme, et la durée de révolution d'une planète autour du Soleil augmente avec la distance à celui-ci.

Dans l'immédiat, le copernicianisme opposé à toute une tradition universitaire est très peu suivi. L'Église catholique le condamne, mais seulement après que Giordano Bruno (1548-1600) eut tiré les conséquences de l'héliocentrisme et eut fait éclater la voûte céleste pour lui substituer un *Univers infini*, peuplé d'une infinité de *mondes* identiques au nôtre. Arrêté par l'Inquisition, il doit payer de sa vie sa vision audacieuse.

La condamnation de l'Église n'est pas le seul obstacle à la diffusion du copernicianisme. Les astronomes avancent bon nombre d'arguments physiques qui rendent le mouvement de la Terre inconcevable. L'incohérence entre la théorie et les observations pousse l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601) à refuser le copernicianisme et à chercher un compromis.

14. Les lois de Kepler

L'héliocentrisme sera plus facilement accepté sous la forme mathématiquement simple que saura lui donner Johann Kepler (1571-1630).

Né à Weil, dans le duché de Wurtemberg, Kepler mène une vie mouvementée. Protestant, il est chassé de sa chaire de Graz lorsque la ville tombe sous domination catholique. Accueilli à la cour de Rodolphe II à Prague, il y assiste Tycho Brahé et le remplace après la mort de celui-ci dans les fonctions de mathématicien de la cour. Ses connaissances de l'astrologie y sont très appréciées et une de ses principales occupations est de faire l'horoscope de Sa Majesté très-chrétienne. La mère de Kepler est accusée de sorcellerie et il prend sa défense dans le procès intenté contre elle. Mal payé, dans des conditions matérielles dures, Kepler n'a jamais abandonné ses recherches scientifiques. Le récit de sa vie illustre les difficultés qu'un savant pouvait alors rencontrer dans les pays germaniques.

Le système de Kepler décrit le mouvement des planètes sous forme de lois mathématiques simples qu'il a établies empiriquement à partir de ses observations astronomiques et de celles de Tycho Brahé.

La première loi (énoncée avec la seconde, en 1609, dans *Astronomia nova*) dit que chaque planète décrit une ellipse dont un des foyers est occupé par le Soleil; la deuxième postule que la droite joignant la planète balaie des aires égales en des temps égaux. La troisième loi (parue dans *Harmonia mundi*, 1619) énonce que pour toutes les planètes le rapport T^2/a^3 est constant si T est le temps que met la planète pour effectuer un tour complet et a le demi-grand axe de l'ellipse.

La théorie de Kepler va beaucoup plus loin que celle de Copernic dans sa remise en question des valeurs traditionnelles. Il ne se contente pas de remplacer un système composé de mouvements circulaires par un autre, mais donne aux trajectoires planétaires la forme d'une ellipse. Il rompt aussi avec la vitesse uniforme, les orbites matériels portant les planètes ont disparu; en revanche, l'espace, toujours contenu dans la sphère des fixes, reste fini.

Les observations du Pisan Galileo Galilei (1564-1642), faites vers 1600 avec une lunette de sa propre invention, confirment la thèse de l'héliocentrisme. Galilée l'accepte ouvertement et est cité en 1633 devant un tribunal de l'Inquisition et contraint, sous la menace de la torture, de renier

ses doctrines sur le mouvement de la Terre. Il vit en exil jusqu'à sa mort et rédige le fameux *Dialogo*, dialogue sur les deux systèmes du monde entre Salviati (Galilée lui-même), son ami Sagredo et Simplicio symbolisant la scolastique et l'aristotélisme.

La mutation à l'œuvre dans les théories de Copernic et de Kepler est d'une grande portée intellectuelle. Elle renverse le monde clos et hiérarchisé où tout corps a son « lieu naturel » au profit d'un espace indéfiniment étendu où tous les lieux sont équivalents. L'homme est éjecté du centre immobile de l'Univers, autour duquel tout tourne, il n'y a plus de centre et la Terre n'est qu'un astre parmi d'autres.

Pour la première fois, des savants vont à l'encontre d'une tradition séculaire et d'une doctrine religieuse pour une théorie ne présentant que des avantages mathématiques. Profondément religieux, pourtant, Copernic et Kepler croient que Dieu doit donner sa préférence à une théorie mathématiquement simple. Ce choix est significatif du XVII^e siècle à la recherche de connaissances exprimables en formules mathématiques harmonieuses.

15. La mathématisation de la science au XVII^e siècle

Les mathématiques connaissent alors un développement rapide et voient aboutir le long processus de maturation de l'algèbre symbolique (Viète), renaître la théorie des nombres (Fermat), se créer le calcul des probabilités (Pascal et Fermat), la géométrie analytique (Descartes) et le calcul infinitésimal (Leibniz, Newton). Cet extraordinaire foisonnement d'une discipline en pleine effervescence élargit son champ d'action et aiguise sa force d'intervention dans le domaine des autres sciences. Les mathématiques s'appliquent progressivement aux diverses branches de la physique. La nature de l'activité scientifique s'en trouvera complètement bouleversée.

René Descartes (1596-1650) conçoit le monde comme une géométrie incarnée et bâtit sa physique mécaniste sur les seuls concepts d'étendue, de forme et de mouvement. Il est convaincu que les forces qui sont à l'origine du mouvement obéissent à des lois mathématiques invariables. Or la forme n'est qu'étendue, l'étendue peut être traduite en termes mathématiques et le monde entier (étant de l'étendue en mouvement) peut être mathématisé.

Descartes étend même sa conception au fonctionnement de l'organisme humain et le pense comme une machine, un automate.

Comme Descartes, Galilée croit que le monde agit en accord avec des lois mathématiques simples et immuables. Mais il décrit plus clairement et plus radicalement sa nouvelle méthode expérimentale et l'applique brillamment dans ses travaux sur l'étude du mouvement et sur la chute des graves : toute science doit être conçue sur le modèle des mathématiques, elle doit reposer sur des axiomes, les propriétés doivent être déduites des axiomes par des raisonnements déductifs.

Alors que pour Descartes les principes fondamentaux de la physique sont pures constructions de l'esprit, Galilée stipule qu'ils doivent résulter de l'expérience, être des faits expérimentaux, résultats de l'observation de la

nature. Avec lui, la description quantitative s'est définitivement substituée à la perception qualitative aristotélicienne.

La mécanique est la première science à laquelle on applique la nouvelle méthode — les axiomes sont précisés, les lois générales explicitées, etc. — et elle servira de modèle qu'on essaiera d'utiliser pour l'étude d'autres phénomènes, l'optique par exemple. Newton fera la synthèse de la mécanique physique et de la mécanique céleste en établissant son célèbre principe de la gravitation universelle (1686).

16. La vie scientifique au XVII^e siècle

L'expansion des activités scientifiques au XVII^e siècle en Europe (Angleterre, France, Allemagne, Hollande et Italie), le développement, certes timide, de l'enseignement (dans les collèges entre les mains des jésuites et autres confessions religieuses) s'accompagnent d'un accroissement du nombre de gens en contact avec la science.

Les universités restent fidèles au cursus médiéval et ne jouent pratiquement aucun rôle dans l'essor des sciences. Si quelques-uns des grands savants-philosophes (Descartes, Pascal, Leibniz) ont reçu une formation universitaire, l'universalité de leur génie s'est plutôt nourrie de leurs curiosités, qui les ont fait parcourir les pays d'Europe à la recherche d'aventures, d'informations et de connaissances nouvelles. Ainsi Descartes passe douze ans de sa vie à voyager, à visiter les cours ou à servir comme simple soldat dans quelque armée avant de se fixer en Hollande, où l'attire la liberté d'expression, bafouée ailleurs.

Les savants — souvent amateurs au XVII^e siècle — restent dans l'ensemble assez isolés et les échanges difficiles. Pour communiquer les résultats, ils font parfois circuler quelques copies de petits textes, trop courts pour faire l'objet d'une publication, ou échangent des lettres dans lesquelles ils livrent leurs découvertes sous formes chiffrée ou d'anagrammes. Les controverses qui les opposent sont âpres, comme la querelle de priorité qui éclata entre Newton et Leibniz au sujet de la découverte du calcul infinitésimal.

17. Création et rôle des académies des sciences

Le désir d'échanger des informations et de rencontrer des gens ayant les mêmes centres d'intérêt sont à l'origine de la fondation de sociétés scientifiques. La première académie de savants, l'*Academia dei Lincei*, est fondée, dès 1603, à Rome sous les auspices du prince Federico Cesi.

En Angleterre, Francis Bacon (1561-1626) insiste dès le début du siècle sur la nécessité d'échanges intellectuels et des groupes de savants se réunissent à Cambridge, à Oxford, puis, à partir de 1645, au Gresham College de Londres. Ce dernier sera institué par une charte royale (de 1662) sous le nom de *Royal Society*.

À Paris, le Père Marin Mersenne (1588-1648), religieux de l'ordre des

Minimes, organise la vie scientifique en commun et tisse par sa correspondance et ses voyages un vaste réseau entre les savants de France et du monde entier. H. Oldenburg, premier secrétaire de la Royal Society, jouera un rôle un peu analogue en servant de relais dans les contacts entre l'Angleterre et le continent. Mersenne rassemble autour de lui dans un groupe privé, l'*Academia parisiensis*, les plus prestigieux savants (Roberval, Étienne et Blaise Pascal, Desargues, Fermat, etc.). En 1666, Colbert fonde l'Académie des sciences, qui sera la reprise officielle du groupe initié par Mersenne.

La fondation des académies marque la naissance d'une politique consciente des gouvernements européens dans le domaine des sciences. Ils se substituent aux grands mécènes des siècles précédents dans le financement des activités scientifiques. Ils dotent les académies de grands prix attribués annuellement aux lauréats de concours prestigieux que disputent les plus grands savants.

L'*Académie des sciences* de Paris et la *Royal Society* de Londres illustrent dans leurs rapports avec l'État deux modèles possibles : en Angleterre, le rôle de l'État est très réduit et les sciences sont ingouvernées. L'État français, plus riche et plus puissant, exerce un rôle de patronage sur les sciences et contribue à renforcer le prestige de l'académie.

Les Académies des sciences de Berlin et de Saint-Petersbourg seront organisées sur le modèle de celle de Paris, qui s'avère plus efficace, la première par G.W. Leibniz (1646-1716), en 1700, la seconde par le tsar Pierre le Grand en 1724.

Tout au long du XVIII^e siècle, les académies (provinciales et nationales) se multiplient et elles joueront un rôle considérable dans la vie scientifique du Siècle des Lumières. Elles entretiennent un climat d'émulation favorable à la recherche scientifique et facilitent les échanges en créant des journaux scientifiques, qui deviendront très rapidement la tribune privilégiée des savants.

Les souverains essaient de rehausser l'éclat de leurs académies en y attirant des savants de grande renommée. Pierre le Grand s'est tourné vers Bâle, véritable pépinière de savants depuis que Jean et Jacques Bernoulli y avaient commencé leur enseignement, et engage Daniel et Nicolas Bernoulli — fils de Jean — comme académiciens de Saint-Petersbourg. Léonard Euler y fera deux longs séjours.

Le roi Frédéric II de Prusse manifeste, dès son accession au trône, en 1740, la volonté de faire de la capitale Berlin un riche centre intellectuel et réussit à y attirer Maupertuis, Euler, Lagrange, Lambert, etc.

18. Le XVIII^e siècle mathématique

La production mathématique du début du XVIII^e siècle est marquée par l'opposition entre l'école anglaise newtonienne et les écoles continentales fidèles au point de vue leibnizien. Fervents disciples de Newton, les mathématiciens anglais refusent le calcul infinitésimal sous la forme algorithmique leibnizienne et restent à l'écart des progrès réalisés sur le

continent. Si, dans la première moitié du siècle, des savants aussi brillants que A. de Moivre, R. Cotes, B. Taylor, J. Stirling, etc., savent maintenir la recherche mathématique à un niveau élevé, la vitalité de l'école britannique s'essouffle durant la seconde moitié. Elle restera cantonnée dans l'isolement jusqu'à ce que la diffusion de la traduction anglaise du *Traité du calcul différentiel et intégral*, de Sylvestre F. Lacroix (1816), lui donne une impulsion nouvelle.

Sur le continent, on assiste à l'essor de l'analyse mathématique. Confiant dans les créations du siècle précédent, et en particulier dans le succès du calcul infinitésimal, les analystes coordonnent les résultats récents, les complètent et les appliquent à de nombreux domaines des mathématiques. Plus que jamais ils cherchent leur inspiration dans les problèmes physiques; ils allient la réflexion théorique à la recherche expérimentale. L'orientation de leurs travaux est souvent pratique et il n'y a pas de distinction nette entre science et technologie. La résolution des problèmes de mécanique et de mécanique céleste, déjà très mathématisée, est souvent prétexte à des développements théoriques et aboutit à la création d'outils nouveaux comme les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles, le calcul des variations, le calcul formel sur les séries, etc.

Léonard Euler (1707-1783) est une figure clé du XVIII^e siècle mathématique. Savant prolifique, doué d'une force de travail inépuisable, il a exercé sa puissance inventive dans tous les domaines de la science (optique, mécanique, astronomie, théorie des assurances, etc.). Académicien à Saint-Petersbourg et à Berlin, il entretient une correspondance suivie avec les principaux savants d'Europe (Clairaut, d'Alembert, Goldbach, etc.). Il sait saisir au vol les indications de ses correspondants et les prolonger en de vastes théories. Esprit de synthèse, il rassemble et ordonne tous les travaux et résultats accumulés dans le domaine du calcul infinitésimal dans des exposés globaux, qui servent pendant un siècle de textes de référence en analyse.

19. La prééminence de l'école française à la Révolution

Dans la France des Lumières, la science n'est pas étrangère au mouvement philosophique des encyclopédistes. La prédominance des sciences françaises a suivi de près d'une génération celle des lettres, et la communauté scientifique est impressionnante (Lavoisier, Gay-Lussac, Berthollet, etc.). Considérée comme un facteur de progrès social, la science a été largement diffusée. Dans l'*Encyclopédie*, d'Alembert a tenté d'expliquer les principales notions mathématiques et de les rendre accessibles à un plus large public.

La vie scientifique s'organise principalement autour de l'Académie des sciences, et la brillante école de la fin du siècle est l'aboutissement de la politique scientifique française qui veille sur la qualité des académiciens en instaurant une sélection de plus en plus dure. Celle-ci débouche sur la création d'une élite restreinte mais prestigieuse dominant toute la production mathématique de l'époque. Elle va s'illustrer par la publication de grands

traités classiques : *la Mécanique analytique*, de Lagrange; *la Mécanique céleste*, de Laplace; *la Géométrie descriptive*, de Monge, etc.

Malgré l'édifice imposant des mathématiques, un certain pessimisme règne à la fin du XVIII^e siècle. Devant la complexité des problèmes à résoudre, la diversité des approches et l'absence de méthodes générales susceptibles de simplifier la recherche de solutions, certains mathématiciens, comme Lagrange, doutent de l'avenir de leur discipline. Et, pourtant, son œuvre très riche et diverse est à la dimension de celle d'Euler; en particulier, sa *Mécanique analytique* est un chef-d'œuvre de mathématique pure qui présente toute la mécanique de façon formalisée sans aucune figure. La crise de la mathématisation sera très passagère.

Pendant la Révolution française, des six mathématiciens les plus illustres, trois — Monge, Condorcet et Carnot — prendront une part active aux événements politiques et s'enthousiasmeront pour les idéaux révolutionnaires, les trois autres — Lagrange, Laplace et Legendre — attendront prudemment la stabilisation des événements.

Condorcet (1743-1794), par exemple, philosophe et encyclopédiste, est élu en 1789 à l'Assemblée législative, puis à la Convention. Quand le système d'éducation s'effondre sous la poussée révolutionnaire, Condorcet, épris de justice et de démocratie, y voit l'occasion de proposer un plan de réformes de l'instruction publique prônant sa gratuité. Il est connu pour avoir appliqué le premier la théorie des probabilités et les statistiques à l'étude des phénomènes sociaux.

L'effet de la Révolution dans l'évolution des mathématiques se manifeste surtout dans le domaine des méthodes d'enseignement. Outre une réforme de l'enseignement secondaire dans un sens plus démocratique et plus favorable aux sciences, la Convention crée, au niveau supérieur, en 1794, l'École normale de l'An III. Elle fonctionnera quelques mois avec la participation des plus grands savants, dont Lagrange, Laplace et Monge pour les mathématiques.

Mais l'événement le plus important est la fondation de l'École polytechnique en 1794, à laquelle Monge participe activement. Il sera un des professeurs et des protecteurs les plus dévoués de l'école. Celle-ci va jouer un rôle décisif, pendant près de cinquante ans, dans les mathématiques françaises. Les plus grands savants y sont enseignants; outre Monge, Lagrange, il y aura Ampère, Poisson, Fourier, Cauchy, etc. Ils doivent combiner la recherche scientifique et l'enseignement. Ils disposent d'un public d'étudiants d'un niveau assez élevé dont quelques-uns entreprennent des recherches mathématiques immédiates. Enfin, les cours professés à l'école sont systématiquement publiés; F. Klein dira de ces « *admirables traités* » dont le plus célèbre est le *Cours d'analyse* d'A.-L. Cauchy en 1821, qu'ils ont été « *la base de l'étude mathématique dans toute l'Allemagne* » du XIX^e siècle. L'École polytechnique attire de nombreux étudiants et chercheurs étrangers, contribuant ainsi à maintenir la suprématie de l'école mathématique française pendant au moins le premier tiers du XIX^e siècle.

En 1808, le gouvernement français fonde l'École normale supérieure, qui a pour mission de former les professeurs, puis la Faculté des sciences; plus tard, les Écoles spéciales des mines, des ponts et chaussées, du génie maritime amèneront la fin du quasi-monopole de l'École polytechnique.

Par sa renommée, Paris concentre tous les savants en son sein et écrase les autres villes françaises. La figure dominante de cette époque est Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), qui a exercé en France une véritable hégémonie pendant près de trente-cinq ans. Il s'est intéressé à toutes les parties des mathématiques pures et appliquées, mais c'est sans aucun doute en analyse dans la création de la théorie de la variable complexe que son œuvre est la plus déterminante.

20. Les nouvelles conditions du travail mathématique au XIX^e siècle

Déjà, les savants de l'époque révolutionnaire étaient des savants professionnels membres de l'Académie des sciences de Paris, engagés dans des commissions publiques (commission sur le système des poids et mesures, Bureau des longitudes, etc.) ou enseignants. Mais les conditions d'un réel professionnalisme de la situation de mathématicien se trouvent renforcées au XIX^e siècle avec la multiplication des chaires d'enseignement qui permettent à leurs titulaires de se libérer des problèmes matériels et se consacrer à leurs travaux.

La démocratisation croissante de l'enseignement supérieur permet à des classes sociales plus étendues d'accéder aux mathématiques. Des vocations nombreuses peuvent être décelées. Enfin, la révolution industrielle et technique de la deuxième moitié du siècle stimule l'intérêt pour l'outil mathématique et son perfectionnement.

Il y a une augmentation considérable du nombre des chercheurs, des publications scientifiques, un essor très rapide de la production théorique elle-même.

La France, l'Allemagne et l'Angleterre restent les principaux centres mathématiques, mais s'y ajoutent l'Italie, la Russie, les États-Unis et, plus ponctuellement, la Norvège avec Abel et Sophus Lie, la Hongrie avec Bolyai et la Tchécoslovaquie avec Bolzano. Si les idées scientifiques gardent leur universalité et si les rapports internationaux entre savants restent actifs, la science progresse davantage sur des bases nationales spécifiques. Alors qu'Euler, les Bernoulli ou Lagrange avaient partagé leurs vies entre plusieurs pays, les mathématiciens du XIX^e siècle sont fixés dans leur pays d'origine.

En Allemagne, à la même époque que Cauchy, Gauss (1777-1855) est considéré comme le « prince des mathématiciens ». Il s'est imposé par son génie et la profondeur de ses contributions. Mais il a peu publié pendant sa vie et a travaillé seul. La qualité et l'étendue de ses découvertes se sont révélées encore accrues après l'étude de ses notes, ses correspondances et ses œuvres posthumes.

En 1810, Alexander von Humboldt fonde l'université de Berlin et réforme aussi l'enseignement universitaire. Il introduit l'idée que les professeurs peuvent enseigner ce qu'ils souhaitent, en particulier leurs propres recherches. A Königsberg, par exemple, Jacobi s'occupe exclusivement dans ses cours des problèmes sur lesquels il travaille; il organise le premier séminaire et cherche à intégrer dans son cercle ses meilleurs étudiants. De nombreuses universités vont fonctionner autour de

mathématiciens éminents et entretenir une émulation très féconde : Königsberg avec Jacobi, Berlin avec Jacobi, Dirichlet (de 1844 à 1855) et le géomètre Steiner, Göttingen d'abord avec Gauss, puis, à sa mort, avec Dirichlet (de 1855 à 1859) et Riemann (de 1854 à 1866) et, à la fin du siècle, avec Hilbert; la deuxième école de Berlin (après 1860), dont les chefs sont Kummer, Kronecker et Weierstrass, est très brillante. Enfin, on peut encore citer Heidelberg avec Hesse et Helmholtz, et de plus petits centres autour d'une individualité : Möbius à Leipzig, Plücker à Bonn, von Staudt à Erlangen, etc.

L'école mathématique allemande surclasse l'école française à partir de 1850 par le nombre de ses savants, de ses centres actifs et de ses publications. Une des plus célèbres est le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fondé en 1826 par Crelle, puis dirigé à sa mort par Borchardt.

Après l'époque des correspondances et des querelles, puis celle des académies, le XIX^e siècle est non seulement le siècle des grandes écoles et des universités mais aussi celui des journaux et des revues scientifiques. Leur nombre est si important, en particulier après 1860, que nous ne citerons que les plus célèbres. En France, le premier en date est le *Journal de l'École polytechnique* (1795), suivi des *Annales de Gergonne* (1810-1831), du *Bulletin de Férussac* (1826-31) et, en 1836, le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, fondé par Liouville et qui n'a cessé de paraître. A partir de 1835, les *Comptes rendus hebdomadaires* de l'Académie des sciences de Paris assurent une diffusion rapide des nouveaux résultats.

Enfin, les premières Sociétés mathématiques de divers pays naissent et publient leurs bulletins : London Mathematical Society (1865), Société mathématique de France (1872), American Mathematical Society (1888), Deutsche Mathematische Vereinigung (1890), etc.

Il est impossible de décrire le foisonnement de toutes les théories mathématiques au XIX^e siècle. Pour la première fois, leur essor se sépare nettement du développement des problèmes posés en mécanique ou en physique. Seules l'analyse harmonique et la théorie spectrale proviennent en partie des besoins des utilisateurs physiciens, et on assiste à une rapide expansion de la physique mathématique. Mais dans toutes les autres puissantes théories, qui sont les nouveautés du XIX^e siècle, le principal moteur de l'évolution est d'origine interne.

L'obligation d'enseignement faite aux mathématiciens est une des sources de l'effort de rigueur et d'éclaircissement des fondements, qui caractérisent en particulier l'analyse. Celle-ci connaît un élargissement considérable de son domaine avec l'introduction de la variable complexe (Cauchy, Riemann, Weierstrass), et l'ascension de l'analyse fonctionnelle.

La géométrie se trouve réactivée et radicalement changée par la construction des géométries non euclidiennes, qui, d'un point de vue intellectuel, est sans doute l'événement le plus important.

Enfin, l'algèbre explose littéralement dans toutes les directions après 1850 (théorie des groupes, théorie des anneaux et des corps, courbes algébriques, algèbre linéaire, etc.) et envahit toutes les autres branches mathématiques, en réalisant entre elles communications et synthèses profondes. Galois (1830) puis Jordan (1870) sont les créateurs, en France, de la théorie des groupes. L'école anglaise, après des décennies d'isolement,

reprend sa place et joue un rôle important dans ces domaines (Cayley, Sylvester, Hamilton), comme d'ailleurs en physique-mathématique. L'école allemande présente une collection impressionnante de brillants algébristes (Kummer, Kronecker, Dedekind, Weber...).

Les mathématiciens du XIX^e constituent une transition entre l'encyclopédisme du siècle précédent et l'étroite spécialisation contemporaine. Leurs découvertes se rattachent en général à une, deux ou trois branches des mathématiques.

Mais dans la dernière décennie, Poincaré et Hilbert, qui influenceront par leurs idées le plus profondément les recherches du XX^e, témoignent du même génie universel qu'on pouvait penser révolu après l'époque d'Euler ou de Gauss.

En 1900, Hilbert fait preuve d'une extraordinaire intuition prospective en dressant, devant le Deuxième Congrès international des mathématiciens, une liste de vingt-trois problèmes qui devaient, selon lui, marquer le cours des mathématiques du XX^e siècle. Et, en effet, l'histoire de ces problèmes se confond en grande partie avec celle des mathématiques contemporaines.

2. Un moment de rationalité : la Grèce

1. L'émergence d'une pensée abstraite dans l'école ionienne

Dans les cités grecques d'Asie Mineure émerge au VI^e siècle avant J.-C. une forme de pensée abstraite qui est à la source de toute la science occidentale. Les débuts de la philosophie et de la science déductive se sont développés à Milet, puissante ville marchande et riche centre intellectuel largement ouvert aux influences orientales.

On a pu croire pendant longtemps que la pensée rationnelle a surgi subitement du néant et que « *les philosophes ioniens ont ouvert la voie que la science, depuis, n'a eu qu'à suivre*¹ », mais des travaux plus récents, comme ceux de J.-P. Vernant et M. Détiéne sur lesquels nous nous appuyons, ont montré son origine mythique et rituelle; elle ne s'est que progressivement libérée de la magie et de la religion. La première science grecque s'interroge sur les origines du monde et répond au même type de question : Comment notre univers a-t-il pu se former à partir du chaos? Les premières tentatives de réponses des milésiens transposent sur un plan abstrait les explications du monde sensible que proposaient les mythologies anciennes. Les structures de leurs descriptions de l'Univers correspondent encore à celles des mythes : après un état d'indistinction et de confusion où toutes les choses sont mêlées, des couples d'opposés, chaud et froid, sec et humide, émergent pour ensuite interagir, chacun étant alternativement vainqueur et vaincu.

Thalès (floruit 597), le fondateur de l'école ionienne, crée une théorie cosmologique expliquant le devenir de l'Univers à partir d'une seule substance primordiale, l'eau, susceptible de se transformer dans toutes les autres. En se condensant, l'eau forme les corps solides; en s'évaporant, l'air et celui-ci engendre le feu. Mais l'eau n'est pas seulement un élément constitutif, elle est également support : notre Terre repose sur sa masse infinie qui l'enveloppe de toutes parts.

Pour Anaximène (fl. 546), l'élément premier est l'air, omniprésent, moins matérialisé que l'eau, plus abstrait, indifférent à la forme. La raréfaction et la condensation de l'air produisent les autres éléments et ces processus de transformation expliquent l'histoire de la fabrication du monde.

Pour Anaximandre (v. 610-547), autre élève de Thalès, le principe des choses n'est plus un élément matériel, mais c'est l'*ἀπειρον* (*apeiron*),

1. *L'Aurore de la philosophie grecque*. Burnet.

1. Tableau chronologique des écoles mathématiques grecques

PÉRIODE HELLÈNE (600-300 AVANT J.-C.)

PÉRIODE HELLÉNISTIQUE

V. 640 - v. 479	L'école ionienne (à Milet) : Thalès (v. 640 - v. 546), Anaximandre (v. 610 - v. 547), Anaximène (v. 550-480).
V. 585 - v. 400	L'école de Pythagore. Pythagore, Philolaos (v ^e siècle avant J.-C.), Archytas (428-347 avant J.-C.).
v ^e siècle avant J.-C. Guerres Médiques (480 avant J.-C.)	Les Éléates. Xénophane de Colophon, Parménide (le fondateur), Zénon (né entre 495 et 480 avant J.-C.), son disciple.
Siècle de Périclès (450 avant J.-C.)	Les Sophistes (v ^e siècle athénien) : Anaxagore de Clazomène (500-428 avant J.-C.), Hippias d'Élis (né v. 460 avant J.-C.), Hippocrate de Chio (mort vers 430).
Guerre du Péloponnèse	Socrate (469-399 avant J.-C.).
v ^e et iv ^e siècles avant J.-C.	Les atomistes. Démocrite d'Abdère (460-370 avant J.-C.).
388 avant J.-C. - 529	L'Académie de Platon (427-347 avant J.-C.). Ménéchme (350 avant J.-C.). Aristée (deuxième moitié du iv ^e siècle avant J.-C.).
V. 408 - v. 355	Eudoxe et son école établie à Cyzique.
334 avant J.-C.	Fondation de l'école péripatéticienne, ou Lycée, par Aristote (384-322 avant J.-C.).
315 - 255 avant J.-C.	Euclide.
vers 262 avant J.-C.	Apollonius.
323 avant J.-C. - 640	L'école d'Alexandrie. Archimède (287-212 avant J.-C.), Eratosthène (né en 284 avant J.-C.), Zénodore, Hypsiclès (ii ^e siècle), Héron, Nicomède, Dioclès, Ptolémée, Diophante (entre 150 avant J.-C. et 350).
Jules César (60 avant J.-C.) Naissance du Christ	Pappus (fin du iii ^e siècle). Théon et sa fille Hypatie. Proclus (v ^e siècle). Eutocius (fin du v ^e siècle et début du vi ^e).

l'indéterminé, l'illimité, pensé comme contenant; tous les corps s'y trouvent confondus et c'est de l'organisation de ce chaos infini que naissent les mondes.

Le noyau mythique reste présent dans toutes ces conceptions. Vernant voit aussi en elles le reflet des conditions sociales de la cité, qui subissent une profonde mutation au vi^e siècle. Deux siècles plus tôt, elle était commandée par de grands propriétaires fonciers et la vie quotidienne de la masse des petites gens était très pénible. C'est aux alentours de 600 av. J.-C., après une lutte aiguë entre les « gens de bien » et les artisans, que le changement s'accomplit et que l'ensemble des citoyens (*Desmos*) accède à la liberté et au pouvoir.

Un des traits caractéristiques de la société grecque, même archaïque, est l'*agôn*, la rivalité, le combat, dont les concours olympiques sont une forme pacifique. L'homme grec aime susciter des situations conflictuelles et s'opposer à des forces concurrentes; il cherche un adversaire qui lui permet de s'affirmer et de consolider ses opinions. Afin de défier l'autre, il est capable de défendre des positions extrêmes. On reconnaît ce même esprit dans la prédilection des Grecs pour les joutes oratoires et dans leur habileté à perfectionner les techniques rhétoriques. La civilisation grecque classique est une « civilisation de la parole », dans laquelle les systèmes d'explication du monde, ne pouvant plus s'exprimer dans le langage des mythes, se présentent comme problèmes soumis à la discussion, susceptibles de réponses affirmatives ou négatives. Le raisonnement par alternatives ou par couples des premiers penseurs grecs en témoigne.

La cosmologie ionienne, sous la forme achevée qu'elle a chez Anaximandre, décrivant la Terre couverte d'eaux sombres et froides, flottant au centre de la sphère céleste en feu, s'apparente aussi au modèle politique, qui préside à l'organisation par la cité d'un espace homogène autour d'un centre privilégié, l'*agora*, place publique où se tiennent les assemblées du peuple.

Le passage progressif du mythe à la science rend donc compte de la mentalité du peuple grec, de l'esprit de l'*agôn* et reflète l'organisation socio-politique qui se met en place dans les cités. L'avènement de la pensée abstraite correspond, sur le plan politique, à la mise en place du principe de liberté et de souveraineté du peuple, et, sur le plan social, à une période de bouleversements profonds. Une couche d'intellectuels — médecins, rhéteurs et *philosophoi* (amateurs de sagesse, dans lesquels on peut voir de véritables spécialistes du savoir) — apparaît; le savoir acquis n'est cependant pas la propriété exclusive de cette seule couche mais, à travers les débats publics, il devient le bien commun de l'ensemble de tous les citoyens.

Objets de discussions, les propositions mathématiques ne sont plus de simples énoncés traduisant des faits empiriques mais nécessitent désormais une démonstration qui conduit, d'une ou de plusieurs propositions, dites prémisses, à une conclusion nécessaire.

2. Les mathématiques ioniennes : Thalès

Le premier représentant de cette nouvelle forme de rationalité en mathématiques est Thalès, homme d'État, commerçant, ingénieur, astronome, philosophe et mathématicien. Grand voyageur, il apprit les éléments d'algèbre et de géométrie des Égyptiens et des Babyloniens.

En géométrie, on lui attribue plusieurs propositions : «*Tout diamètre partage le cercle en deux.*» L'historien des mathématiques grecques T.L. Heath pense que, loin de l'avoir démontré, Thalès a énoncé cette propriété, qui a pu lui être suggérée par les cercles divisés en secteurs égaux (cf. figure 1) que l'on trouve sur les monuments égyptiens.

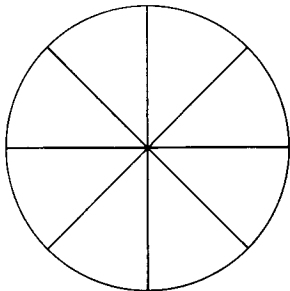


Fig. 1

«*Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont semblables.*» Selon Heath, Thalès ne conçoit pas les angles comme des grandeurs, mais comme des figures ayant une certaine forme. Celles des angles ci-dessus seraient «semblables».

Thalès aurait également indiqué comment mesurer la distance d'un navire au rivage, et son procédé — mal connu — reposerait sur l'égalité de deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux.

Enfin, on lui attribue le théorème qui dit que «*l'angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit*».

La précarité des témoignages historiques ne permet cependant pas d'évaluer les contributions réelles du fondateur de la géométrie grecque.

Les mathématiques grecques de l'époque hellène se sont développées dans plusieurs écoles, qui se succédaient, chacune profitant des acquis des précédentes. Ainsi l'école ionienne va peu à peu perdre son importance pour finalement être supplantée par celle des pythagoriciens.

3. La conception arithmétique de l'école de Pythagore

Pythagore, né dans l'île de Samos, au large de Milet, dans la première moitié du VI^e siècle, aurait été l'élève de Thalès et de son disciple Anaximandre. Après un long périple, qui l'aurait mené en Égypte et à Babylone, il s'installe à Crotona, une colonie grecque de l'Italie du Sud, qui

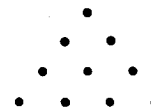
était alors déchirée par d'incessantes luttes politiques et économiques opposant le parti du peuple aux aristocrates. Pythagore y fonde une secte religieuse, philosophique et scientifique, à vocation politique. Les pythagoriciens prétendent se battre contre le relâchement des mœurs dû à l'opulence dans laquelle vivent les aristocrates et préconisent un genre de vie austère exaltant la maîtrise de soi, le courage et la discipline collective. Vivant en communauté, les adeptes de Pythagore pratiquent des rites secrets et s'adonnent à l'étude de la philosophie et des sciences, ils partagent leurs biens matériels et mettent en commun leurs découvertes scientifiques. Les travaux attribués couramment à Pythagore ne se rapportent donc pas uniquement à ceux du légendaire Pythagore mais généralement à ceux taits par l'école entre 585 et 400 avant J.-C.

La destruction de la confrérie de Crotona à la suite d'un soulèvement populaire mit fin aux activités politiques de la secte, mais non pas à ses activités scientifiques, qu'elle poursuivit, même dispersée, pendant deux siècles encore.

La conception cosmologique de Pythagore abandonne l'idée moniste d'une substance primordiale qui engendrerait tout l'Univers. Dualiste, elle voit dans la tension entre principes opposés — limité-illimité, impair-pair, un-multiple, droit-courbe, carré-oblong — l'origine de tout devenir. Se désintéressant des éléments matériels pouvant rendre compte de la genèse des diverses composantes de l'Univers, Pythagore, porté par le profond courant religieux qui traverse alors la Grèce, vise plutôt une explication globale symbolisant la totalité du cosmos. Il la trouvera dans le nombre, comme sa devise : «*Toutes choses sont des nombres*» en témoigne (cf. encadré 2).

2. La mystique des nombres dans l'école de Pythagore

Pour le Pythagoricien mystique, la Société des Nombres se compose de la **monade**, le nombre **un**, origine du principe d'identité, de la **dyade**, ou nombre **deux**, premier nombre pair et féminin, origine du principe de non-contradiction, de l'opposition entre le moi et le non-moi, de la **triade**, premier nombre impair et masculin, etc. et de la **décade**, qui représente la somme des points contenus dans la *Tétraktys*



qui fut un symbole ésotérique pour les membres de la confrérie pythagoricienne. Ils lui auraient adressé la prière suivante :

«*Bénis-nous, nombre divin, toi qui as engendré les dieux et les hommes! O sainte, sainte Tétraktys! toi qui contiens la racine et la source du flux éternel de la création! Car le nombre divin débute par l'unité pure et profonde et atteint ensuite le quatre sacré; ensuite il engendre la mère de tout, qui relie tout, le premier-né, celui qui ne dévie jamais, qui ne se lasse jamais, le Dix sacré, qui détient la clef de toutes choses.*»

Les pythagoriciens, selon Aristote, considèrent les nombres comme les éléments constitutifs de la matière. Ils identifient les nombres à des ensembles de points disposés en configurations géométriques, un peu à l'image de points dessinés dans le sable ou de cailloux disposés sur le sol ou, encore, « de la façon dont les étoiles dessinent une constellation ». L. Brunschvicg, à la recherche d'une explication de cette conception, voit dans les deux caractéristiques des constellations célestes — le nombre des astres qui les constituent et les figures géométriques qu'elles dessinent dans le ciel — une origine possible et résume ainsi la pensée pythagoricienne : « De même que les constellations ont un nombre qui leur est propre, toutes les choses connues ont un nombre. »

Cette école est à l'origine de l'arithmétique grecque, qui se limite à l'étude des nombres entiers, les nombres étant considérés comme collections discrètes d'unités. Cette arithmétique est géométrique : elle classe les nombres selon la forme des assemblages correspondants de points en nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, etc. (cf. encadré 3). Elle est visuelle : de nombreuses propriétés des nombres polygones sont directement lisibles sur les arrangements géométriques qui les figurent; on voit, par exemple, que tout nombre carré est la somme de deux nombres triangulaires. La croissance des carrés est gnomonique, c'est-à-dire qu'on peut passer d'un nombre carré au suivant en ajoutant un *gnomon* (une équerre) — le gnomon étant une figure qui, ajoutée à une autre figure, la fait croître sans en altérer la forme.

Les pythagoriciens considéraient d'autres nombres plans et des nombres solides, les nombres polyèdres (tétraèdre, pentaèdre, etc.). Ils auraient également découvert les nombres amicaux — deux nombres étant amicaux si chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre — et les nombres parfaits, c'est-à-dire des nombres égaux à la somme de leurs diviseurs propres.

Nous ignorons s'ils ont donné une démonstration du théorème dit de Pythagore — « Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés » —, mais il est probable que non, bien qu'ils aient été conscients de la nécessité d'une démonstration.

Outre les nombres entiers, les pythagoriciens ont étudié les rapports de nombres entiers et ont créé une théorie des proportions. Parmi celles-ci, ils ont surtout retenu les plus belles, la proportion musicale en particulier :

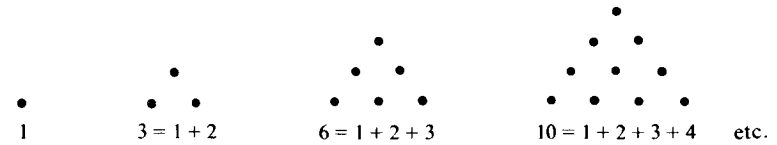
$$\frac{p}{a} = \frac{h}{q}, \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont deux nombres, } a \text{ étant leur moyenne arithmétique}$$

$$\frac{p+q}{2} \text{ et } h \text{ leur moyenne harmonique } \frac{2pq}{p+q}.$$

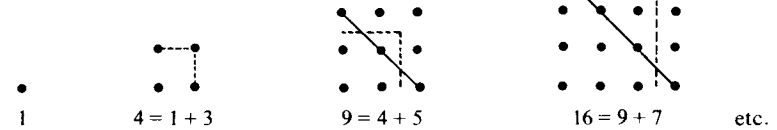
La musique était très à l'honneur, les connaissances musicales faisaient partie du domaine des mathématiques et, plus particulièrement, de la théorie des nombres. Les sons harmonieux, selon Pythagore, sont produits par des rapports exprimés en nombres entiers, et, plus le rapport est simple (c'est-à-dire plus sa valeur numérique est petite), plus le son est beau.

La découverte des irrationnels, généralement attribuée aux pythagoriciens, s'est effectuée par la constatation que certains rapports ne peuvent s'exprimer par des nombres entiers. Cette découverte sanctionne l'échec de

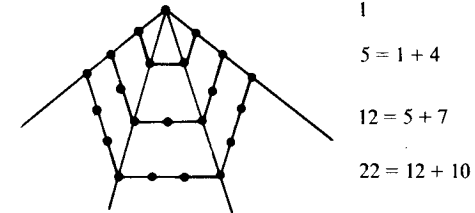
Les nombres triangulaires



Les nombres carrés



Les nombres pentagonaux



Ces nombres polygonaux sont obtenus en sommant les termes d'une progression arithmétique dont le premier terme vaut 1. La raison de cette progression est 1 pour les triangles, 2 pour les carrés, 3 pour les pentagones, etc.

l'adéquation pythagoricienne du monde aux nombres entiers et provoque une première crise dans l'histoire des mathématiques. Nous l'étudierons plus en détail au chapitre 5.

4. La réaction : les éléates

L'influence de l'école d'Élée (v^e siècle avant J.-C.) sur la formation d'une pensée scientifique abstraite est énorme. Son fondateur, Parménide, fait, le premier, une distinction rigoureuse entre le sensible et l'intelligible et rend inéluçable la confrontation de l'expérience avec les exigences de la raison. C'est pourquoi les éléates se sont opposés à la doctrine pythagoricienne associant un nombre à toute chose. Si les objets discrets peuvent être représentés par les nombres entiers, il n'en est pas de même des grandeurs continues comme les longueurs, les aires, les volumes, etc., qui ne peuvent en général pas être interprétés comme des collections discrètes d'unités à moins de concevoir une infinité d'éléments très petits qui les composerait. En réaction à cette conception, Zénon d'Élée (né entre 495 et 480 avant J.-C.) formule quatre paradoxes illustrant l'impossible existence d'une matière divisible à l'infini et l'impossibilité de tout mouvement si l'espace et le temps sont composés de parties indivisibles (cf. page 169).

5. Les sophistes

La victoire athénienne sur les Perses met fin aux guerres médiques (en 479 avant J.-C.) et consacre l'hégémonie d'Athènes sur les autres cités grecques. La ville connaît alors un prodigieux essor économique et un épanouissement culturel inégalé. La démocratie instaurée au vi^e siècle par les législateurs Solon et Clisthène se consolide au v^e siècle sous l'égide de Périclès et stimule les activités dans toutes les disciplines humaines. Le renforcement des institutions politiques, l'existence de l'agora, la nécessité du débat public, suscitent une confrontation et une mise en commun des découvertes, des connaissances et des systèmes de pensée.

La première grande école athénienne est celle des sophistes, enseignants professionnels ambulants qui reçoivent des émoluments en échange de leur savoir. Ils entraînent les citoyens pour les combats de paroles qui ont couramment lieu dans les assemblées du peuple et préparent à l'argumentation. Platon et Aristote ne verront en eux que de vains dialecticiens et les critiqueront sévèrement. L'état d'esprit général, hostile aux philosophes, s'explique peut-être par l'importance croissante que les sophistes ont prise dans la vie publique de la cité. Ce mécontentement culminera un peu plus tard dans le procès et la condamnation à mort de Socrate, qu'on accusait d'être un représentant des sophistes.

Les problèmes mathématiques qu'étudient les sophistes sont presque toujours en relation avec un des trois célèbres problèmes grecs qui ont hanté les esprits pendant des siècles : la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle.

Selon Eutocius², l'origine du premier serait légendaire : Apollon aurait, par la bouche de l'oracle de Délos, ordonné qu'on double un des autels de son sanctuaire. Les habitants de Délos se trouvent donc confrontés au problème

de trouver le côté x d'un cube dont le volume serait le double d'un cube de côté a donné, ce qui revient à résoudre l'équation $x^3 = 2a^3$, ou trouver la racine cubique de 2.

Dans ses tentatives de partager en trois un angle donné, Hippias d'Élis (né vers 460 avant J.-C.), sophiste contemporain de Socrate, invente une courbe nouvelle, la quadratrice, qui n'est pas constructible à l'aide de la règle et du compas.

Les géomètres grecs considérant la droite et le cercle comme figures fondamentales n'envisagent en général que des problèmes susceptibles d'être résolus à la règle et au compas. Les trois problèmes ci-dessus échappent à cette restriction, et c'est bien pour cela qu'ils ont résisté si longtemps à toutes les tentatives de résolution, à tel point que la quadrature du cercle est devenue synonyme d'impossibilité. Il s'agit de construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné. Le côté du carré étant a , d le diamètre du cercle, il faut que $\frac{a^2}{d^2} = \frac{\pi}{4}$ et la quadrature du cercle équivaut à la recherche de la valeur de π .

Les Égyptiens et les Babyloniens admettant la proportionnalité du côté et du diamètre ont calculé des valeurs déjà relativement précises de π , $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ et

$3\frac{1}{8}$ respectivement. Les Grecs ne se contentent pas de trouver des valeurs approximatives de π , bien qu'Archimède donne une méthode qui consiste à approcher π par des encadrements de plus en plus serrés, mais essaient d'arriver à la construction du carré équivalent. Jusqu'au xvii^e siècle, la méthode d'Archimède servira de modèle pour le calcul approximatif de π . Alors que les mathématiciens du xvi^e siècle comme Stifel ou Maurolico expriment des doutes sur la possibilité de la quadrature du cercle, James Gregory (1667) entreprend de démontrer que π est un nombre transcendant. En 1761, Lambert démontre que π est irrationnel et, en 1882, Lindemann établit la transcendance de π .

6. L'Académie platonicienne

Platon (427-347 avant J.-C.), proche de Socrate, vit au moment de la décadence athénienne. Athènes est affaiblie par la guerre du Péloponnèse et les nombreuses autres guerres qui opposent les cités grecques entre elles. Son autonomie est menacée — par le roi Philippe de Macédoine — et la démocratie est en crise. Platon veut sauver Athènes en lui enseignant la philosophie et la vertu ; il fonde vers 377 avant J.-C. une école philosophique, l'Académie, qui pendant un siècle dominera toute la vie intellectuelle de la cité. Elle perdurera jusqu'en 529, date de sa fermeture par l'empereur chrétien Justinien, qui juge ses idées païennes intolérables.

2. Eutocius (fin du v^e et début du vi^e siècle), commentateur hellénistique des œuvres de la mathématique grecque classique.

Espace consacré à l'étude et à la recherche philosophique et scientifique, l'Académie était surtout organisée en fonction de l'enseignement, mais elle contenait aussi des lieux d'habitation et de promenade. Sans être mathématicien lui-même, Platon accorde aux mathématiques une place importante dans son système éducatif et encourage vivement son étude; son œuvre contient quelques passages mathématiques sur la théorie des nombres, la stéréométrie et les figures cosmiques (cf. encadré 4), mais son importance pour les mathématiques réside ailleurs.

C'est à l'époque et dans l'entourage de Platon qu'apparaissent les premiers éléments de géométrie. Leurs auteurs enrichissent le patrimoine des vérités mathématiques connues en commençant par en faire apparaître l'ordre hiérarchique dans un système de présentation. Les principaux résultats du IV^e siècle, sur les sections coniques en particulier, sont d'ailleurs attribués aux disciples de Platon.

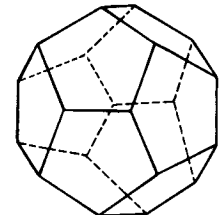
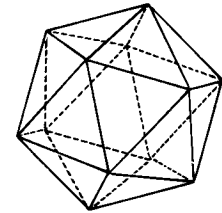
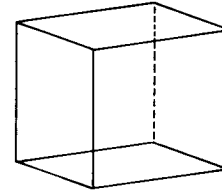
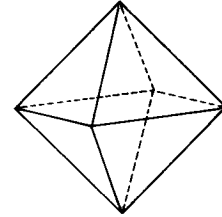
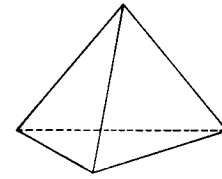
Platon s'interroge sur la nature et la structure des mathématiques. Les platoniciens sont les premiers à être pleinement conscients du caractère abstrait des objets mathématiques. Ils distinguent entre le monde réel et le monde des *Idées*. Alors que les objets sensibles sont soumis au changement et ne peuvent être perçus que subjectivement, leurs modèles sont immuables, permanents et universels. C'est évidemment dans le monde des Idées que les philosophes de l'Académie cherchent la connaissance vraie, car ils veulent connaître ce qui est toujours et non ce qui, à un moment donné, naît et périt. Ce sont les propriétés du cercle idéal qui les intéressent et non pas la nature fugitive des ronds dans l'eau. De même, la droite tracée dans le sable n'est qu'une réalisation imparfaite de la droite abstraite. Ce tracé malhabile suggérera la droite idéale, objet de la connaissance mathématique. Le philosophe-géomètre serait incapable, par exemple, de dénombrer deux objets s'il ne portait déjà en lui l'idée de nombre et l'essence du nombre 2. Comme les idées sont éternelles, donc antérieures à toute expérience, elles sont accessibles intuitivement comme des objets qu'on contemplerait mentalement.

Cette perception des mathématiques, distinctes du monde physique, a des conséquences sur le plan de la démonstration : tout recours à l'expérience est désormais à proscrire. Les platoniciens préconisent l'usage exclusif du raisonnement déductif, et ce choix transforme radicalement les mathématiques.

Les historiens des sciences se sont souvent interrogés sur les raisons de ce choix et ont mis en avant la recherche par les philosophes grecs d'une Vérité éternelle et immuable. Par leur appartenance à des écoles philosophiques, les mathématiciens hellènes ont participé à cette quête. Or, contrairement aux raisonnements par analogie ou par induction, qui n'offrent aucune certitude au niveau des conclusions, la *déduction* conduit à des résultats absolument certains si les prémisses sont correctes.

L'importance accordée à la forme par la pensée grecque a favorisé la mise en place de canons de rigueur auxquels doit se plier l'exposé des résultats, même si les méthodes d'investigation diffèrent des méthodes de démonstration.

Les historiens ont longuement discuté du clivage qui paraît avoir séparé les mathématiques pures, aventure mentale facilitant le passage du sensible à



... la première espèce a pour élément le triangle, dont l'hypothénuse est deux fois plus longue que le plus petit côté. Si l'on accouple une paire de ces triangles par la diagonale et qu'on fasse trois fois cette opération, de manière que les diagonales et les petits côtés coïncident en un même point comme centre, ces triangles, qui sont au nombre de six, donnent naissance à un seul triangle, qui est équilatéral. Quatre de ces triangles équilatéraux réunis selon trois angles plans forment un seul angle solide, qui vient immédiatement après le plus obtus des angles plans. Si l'on compose quatre angles solides, on a la première forme de solide, qui a la propriété de diviser la sphère dans laquelle il est inscrit en parties égales et semblables. La seconde espèce est composée des mêmes triangles. Quand ils ont été combinés pour former huit triangles équilatéraux, ils composent un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on a construit six de ces angles solides, le deuxième corps se trouve achevé. Le troisième est formé de la combinaison de deux fois soixante triangles élémentaires, c'est-à-dire de douze angles solides, dont chacun est enclos par cinq triangles plans équilatéraux, et il y a vingt faces qui sont des triangles équilatéraux. Après avoir engendré ces solides, l'un des triangles élémentaires a été déchargé de sa fonction, et c'est le triangle isocèle qui a engendré la nature du quatrième corps. Groupés par quatre, avec leurs angles droits se rencontrant au centre, ces isocèles ont formé un quadrangle unique équilatéral. Six de ces quadrangles, en s'accolant, ont donné naissance à huit angles solides, composés chacun de trois angles plans droits, et la figure obtenue par cet assemblage est le cube, qui a pour faces six tétraèdres de côtés égaux. Il restait encore une cinquième combinaison. Dieu s'en est servi pour achever le dessin de l'univers.

(Platon, *le Timée*, 54c-55d)

l'intelligible et à la vérité, et les mathématiques appliquées, simple outil de travail des marchands, des hommes d'affaires et des artisans. La classe des intellectuels, tournée entièrement vers la spéculation, semble avoir été étrangère à toute pratique, et on comprend alors aisément sa préférence pour la déduction, qui ne fait à aucun moment appel à l'expérience ou à l'observation.

7. Aristote et le Lycée

Aristote (384-322 avant J.-C.), l'élève le plus fameux de Platon, devint après la mort de son maître le précepteur d'Alexandre le Grand. En 334 avant J.-C., Aristote revint à Athènes pour y créer son école, qu'il installa dans le gymnase attenant au Lycée, temple d'*Apollon Lykeios*.

Très informé sur les mathématiques de son temps, Aristote, comme Platon, s'intéresse surtout à leur nature et à leur lien avec le monde réel. Il est néanmoins plus matérialiste que Platon, car, si ce dernier reléguait les objets mathématiques entièrement dans le domaine des idées, Aristote se borne à en abstraire les essences universelles, le nombre et la forme géométrique. Les mathématiques étudient ces abstractions, qu'on déduit directement des propriétés des corps physiques, et Aristote clarifie les notions de base nécessaires à cette étude. Il distingue entre les définitions, les axiomes, les hypothèses, etc., et soulève le problème de l'existence des objets définis (cf. encadré 5). En effet, la définition ne garantit pas nécessairement l'existence de l'objet en question. Ainsi, on peut aisément définir un polyèdre à dix faces et en démontrer des propriétés sans qu'une telle figure existe. Pour Aristote, l'existence d'un objet mathématique est établie si on arrive à le construire.

« *Savoir, c'est connaître par le moyen de la démonstration* », écrit Aristote. Posséder le savoir n'est donc plus contempler comme pour Platon, mais produire le discours capable d'expliquer. Ce discours doit obéir à certaines règles qu'Aristote met en place, devenant ainsi le fondateur de la logique. Ordonnant et systématisant le savoir, Aristote est également à l'origine de la séparation de la science en disciplines distinctes.

Dans la *Physique*, Aristote réfléchit sur l'infini. En l'absence d'un concept bien déterminé, il s'efforce d'élaborer une conception permettant de rendre compte des résultats qu'obtiennent les mathématiciens en itérant l'addition ou la division. Les entiers positifs sont infinis en puissance selon l'addition, puisqu'en ajoutant un à un nombre on obtient un nouveau nombre et on peut indéfiniment itérer cette opération. Une grandeur géométrique, ligne, surface ou solide, est infinie en puissance selon la division. Le temps a la même propriété. Mais les « points » et les « instants » ne constituent pas les éléments ultimes composant la ligne ou le temps, comme c'était le cas chez les pythagoriciens. Le point est pensé indivisible, et donc un ensemble de points ne pourra jamais former une ligne continue et divisible. Comme les nombres, les points sont des quantités discrètes, distinctes des grandeurs continues de la géométrie.

— Toute connaissance rationnelle, soit enseignée, soit acquise, dérive toujours de *notions antérieures*.

— Les notions antérieures ne peuvent être nécessairement que de deux espèces : ou bien, c'est l'*existence* même de la chose qu'il faut préalablement connaître; ou bien, c'est le *nom* seul de la chose qu'il faut comprendre; parfois aussi, il faut savoir tout ensemble et l'existence de la chose et le nom qu'elle porte.

— J'appelle *thèse* d'un principe syllogistique immédiat la proposition qui ne peut pas être démontrée, et qu'il n'est pas indispensable de connaître pour apprendre quelque chose; celle au contraire que l'on doit nécessairement connaître pour apprendre la chose quelle qu'elle soit, je la nomme *axiome*.

— La thèse qui prend l'une quelconque des deux parties de l'énonciation, c'est-à-dire qui affirme ou qui nie l'existence de l'objet, reçoit le nom d'*hypothèse*. La thèse qui est dénuée de ces conditions, est une *définition*.

(*Seconds analytiques*, Livre I)

8. Les *Éléments* d'Euclide

Née à l'époque de Thalès, la science abstraite, très proche à ses origines du mythe, s'épanouit parallèlement à l'essor des cités grecques. Elle se constitue dans une pleine autonomie, indépendante de la philosophie et de la religion, au III^e siècle avant J.-C., qui est un siècle de crise pour la cité. La mathématique grecque se distingue surtout par son caractère démonstratif et déductif, forgé dans le feu des discussions, et les *Éléments de géométrie* d'Euclide sont l'ouvrage qui répond le mieux à cette double exigence. Par la rigueur de sa charpente logique, par le choix judicieux des « *notions premières* » qui lui servent de fondement et par la clarté de ses démonstrations, cet ouvrage constitue l'apogée de la création mathématique en Grèce classique.

Proclus affirme, au V^e siècle après J.-C., qu'en rassemblant les *Éléments*, Euclide « *en a coordonné beaucoup d'Eudoxe, perfectionné beaucoup de Théétète et qu'il a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montrés d'une manière relâchée* ». Euclide aurait vécu au III^e siècle avant J.-C. à Alexandrie et y aurait enseigné la géométrie. Le texte des *Éléments* dont nous disposons aujourd'hui grâce aux travaux de J.L. Heiberg, T.L. Heath, P. Tannery et autres historiens des mathématiques semble très fidèle à l'original. Nous savons que les Livres XIV et XV sont des additions plus tardives. Nous ignorons si les treize premiers sont l'œuvre d'un seul homme ou d'une école groupée autour d'Euclide. La citation de Proclus semble suggérer que les *Éléments* résultent du rassemblement et de la mise en ordre de travaux antérieurs; mais ils en diffèrent radicalement par leur exposé systématique, déduisant des propositions de plus en plus compliquées de quelques définitions, axiomes et postulats admis sans démonstration. Pendant

plus de deux millénaires, les *Éléments* d'Euclide ont été considérés comme un modèle de rigueur et ils ont exercé une influence durable sur le développement des mathématiques.

Les bases de l'édifice

Les quatre premiers livres des *Éléments* sont consacrés à la géométrie plane et étudient les propriétés fondamentales des figures rectilignes et des cercles. Euclide n'aborde dans les *Éléments* que des problèmes dont les solutions se construisent à l'aide de la règle et du compas, réalisations matérielles de la droite et du cercle.

Le Livre I est précédé des définitions des concepts utilisés dans la suite. Ceux-ci gardent un contenu intuitif puisqu'ils sont définis en termes de réalités physiques. « *Le point est ce qui n'a aucune partie.* » (Définition 1.) « *Une ligne est une longueur sans largeur.* » (Définition 2.) « *La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.* » (Définition 4.) « *Une surface est ce qui a longueur et largeur seulement.* » (Définition 5), et ainsi de suite. Ces définitions sont suivies de cinq demandes (ou postulats) :

- « On demande : 1) "qu'on puisse conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque";
2) "qu'on puisse prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie en une droite";
3) "que d'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, on puisse décrire une circonférence quelconque";
4) "et que tous les angles droits soient égaux entre eux";
5) "et que si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits". »

Les trois premiers postulats assurent l'existence de la droite et du cercle. Le cinquième, dit postulat des parallèles, est le plus célèbre. Sa forme relativement compliquée a toujours intrigué les mathématiciens, qui ont tenté de le déduire des quatre premiers ou de le laisser de côté jusqu'à ce qu'on se soit aperçu au XIX^e siècle qu'il était possible de construire d'autres géométries non euclidiennes et que le cinquième postulat avait bien sa raison d'être.

Euclide énonce ensuite les *notions communes*, ou axiomes, qui, contrairement aux postulats, valables seulement en géométrie, s'appliquent généralement à toutes les sciences. Les axiomes sont des évidences qu'il est, selon Aristote, « *indispensable de connaître pour apprendre quelque chose* » (cf. encadré 5). Le postulat n'est qu'un principe que le géomètre « demande » à son interlocuteur de lui accorder, mais qui n'est ni « évident » ni « axiomatique » et qui pourrait être nié sans contradiction. Euclide épousa probablement le point de vue aristotélicien interprétant les postulats comme de simples « hypothèses » qui seront confirmées si les conséquences qu'on en déduit sont adaptées à la réalité. Si les mathématiciens du XX^e siècle n'ont pas

manqué d'y voir une première manifestation de la méthode axiomatique, la position des successeurs d'Euclide était moins nuancée : jusqu'au XIX^e siècle, les géomètres voyaient dans les postulats de la géométrie euclidienne des vérités irréfutables adaptées à la description du monde sensible.

Les définitions, postulats et axiomes étant posés, Euclide démontre, au Livre I, les propriétés élémentaires des triangles, parmi lesquelles les cas d'égalité, deux triangles étant égaux lorsqu'ils peuvent coïncider par superposition. Quelques constructions géométriques sont décrites, comme la bissectrice d'un angle, le milieu d'un segment et la perpendiculaire à une droite.

Le Livre I comprend également la théorie des parallèles (cf. chapitre 4) et le calcul des aires de quelques figures planes (triangles, parallélogrammes et carrés). La notion d'aire est une notion fondamentale dans la géométrie grecque. Celle-ci compare les aires des figures rectilignes entre elles à l'aide de la notion de figures équivalentes, figures ayant même aire sans être égales.

Le Livre II pose les fondements de ce qu'on a appelé l'algèbre géométrique, qui remonte à l'école de Pythagore. Toutes les quantités y sont représentées géométriquement et les opérations sur les nombres sont effectuées géométriquement. Des segments de droites remplacent les nombres. Le produit de deux nombres $a \cdot b$ n'est alors rien d'autre que l'aire du rectangle de côtés a et b . Le produit de trois nombres est un volume. On additionne deux nombres en mettant bout à bout les segments de droites qui les représentent, on divise un produit ab par un nombre c en construisant à l'aide de l'application des aires le rectangle de côté c et d'aire ab donnés. Cette même méthode permettra de résoudre géométriquement des équations quadratiques, comme on verra plus loin (au sujet du Livre VI, qui donne les théorèmes généraux à la base de cette technique).

Le Livre III est entièrement consacré à la géométrie du cercle (cf. chapitre 4) et le Livre IV étudie l'inscription de polygones réguliers dans le cercle ainsi que leur circonscripton.

La théorie des proportions du Livre V

Si les quatre premiers livres sont élémentaires, le Livre V est d'un niveau nettement supérieur et la théorie des rapports qu'il expose est très subtile. On l'attribue parfois à Eudoxe de Cnide (vers 400-355 avant J.-C.), directeur d'une école à Cyzique qui rivalisait avec l'Académie de Platon, mais le fait est mal établi.

La notion de rapport se présente intuitivement dès qu'on veut comparer deux grandeurs, c'est-à-dire les mesurer. Aussi les pythagoriciens avaient-ils élaboré une théorie des rapports, mais elle ne s'appliquait qu'aux grandeurs commensurables, c'est-à-dire les grandeurs dont le rapport s'exprime à l'aide de nombres entiers : les pythagoriciens interprétaient les grandeurs géométriques comme collections discrètes d'unités. Ils ne pouvaient donc comparer deux grandeurs que lorsque celles-ci avaient une unité de mesure commune, de sorte que chacune d'elles était un multiple entier de l'unité commune. Si, par exemple, la longueur d'un segment de droite comprend m

unités, celle d'une deuxième n unités, les deux longueurs seront dans le rapport $m : n$. Or, voulant rapporter la diagonale d'un carré au côté, les pythagoriciens ont constaté avec effroi que ces deux grandeurs n'avaient pas de mesure commune. Ce qui était une réalité sensible tant qu'on se plaçait au point de vue de la géométrie devenait inexistant quand on essayait de l'exprimer par des nombres entiers. Ces lignes incommensurables sans existence arithmétique se dérobaient à la théorie pythagoricienne des rapports. La théorie des proportions élaborée au Livre V s'applique aussi bien aux grandeurs commensurables qu'aux grandeurs incommensurables.

La théorie des proportions constitue un morceau de choix de la littérature mathématique de tous les temps. Pendant des siècles, elle a intéressé et fasciné les mathématiciens. Karl Weierstrass, réformateur de l'analyse au XIX^e siècle, lui a rendu hommage en faisant sienne la fameuse définition 5 de la proportionnalité des grandeurs (cf. encadré 6) et en l'adoptant comme définition de l'égalité de deux nombres. Le but d'Euclide n'était cependant pas de construire un ensemble de nombres, mais de fonder la mesure des grandeurs. Sa théorie joue dans les mathématiques grecques le même rôle que la théorie des nombres réels dans l'analyse moderne.

6. Les premières définitions du Livre V des *Éléments de géométrie* d'Euclide

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand elle mesure la plus grande.
2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand elle est mesurée par la plus petite.
3. On entend par raison une certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes considérées comme se contenant l'une l'autre.
4. On dit que des grandeurs ont une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
5. On dit que des grandeurs sont en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième étant comparés à d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième, chacun à chacun, les premiers équimultiples de la première et de la troisième sont en même temps plus grands que les équimultiples de la seconde et de la quatrième, ou leur sont égaux ou plus petits.
6. On appellera proportionnelles les grandeurs qui ont la même raison.

(Traduction Peyrard, 2^e éd., 1809)

Bien qu'il ne la définisse nulle part, Euclide inclut dans la notion de *grandeur* des longueurs, des aires, des volumes, des poids, des angles, des intervalles de temps, etc. Refusant d'utiliser l'évidence géométrique, mais évitant aussi tout recours à l'arithmétique, il se garde d'attribuer aux grandeurs des valeurs numériques.

Sa définition 4 (cf. encadré 6) fixe les grandeurs qu'on peut comparer; il ne convient pas de former le rapport de deux quantités dont l'une serait si petite qu'aucun multiple fini de cette quantité ne puisse dépasser l'autre.

Cette définition dite «axiome d'Archimède», qu'on retrouvera plus loin, exclut les quantités infinitésimales et l'infiniment grand. La définition des grandeurs proportionnelles est la définition clé de toute la construction du Livre V (cf. encadré 6, définition 5). Elle indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux rapports soient égaux :

Si a, b, c et d sont des grandeurs, elles ont même rapport $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque, pour

- tous entiers n et m , on a les implications suivantes :
- si $ma > nb$, alors $mc > nd$;
 - si $ma = nb$, alors $mc = nd$;
 - si $ma < nb$, alors $mc < nd$.

Euclide introduit ensuite un ordre total sur l'ensemble des rapports de grandeurs, c'est-à-dire que l'on peut toujours comparer deux rapports.

On a pu montrer que la définition 5 partage l'ensemble des nombres rationnels en deux sous-ensembles non vides et disjoints tels que tout nombre du premier ensemble soit strictement supérieur à tout nombre du second, c'est-à-dire qu'elle définit une *coupure de Dedekind* dans les rationnels (cf. chapitre 5, page 206). Une telle coupure détermine un nombre réel (rationnel ou irrationnel). Mais telle n'était pas la préoccupation d'Euclide, nous l'avons déjà dit.

Des dix-huit définitions posées au début du livre ainsi que des notions communes énoncées au Livre I, Euclide déduit (sans recourir aux postulats, dont le contenu est géométrique) avec une élégance admirable et sans presque aucune faiblesse logique, vingt-cinq théorèmes qui établissent les propriétés des grandeurs et des rapports de grandeurs. Il démontre par exemple en langage algébrique moderne que :

$$m(a + b + c + \dots) = ma + mb + mc + \dots \text{ (proposition 1);}$$

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ alors } \frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd} \text{ (proposition 4);}$$

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et } \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \text{ alors } \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \text{ (proposition 11);}$$

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \text{ alors } \frac{a}{b} = \frac{a + c + e}{b + d + f} \text{ (proposition 12);}$$

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et si } a > c, \text{ alors } b > d;$$

$$\text{si } a = c, \text{ alors } b = d;$$

$$\text{si } a < c, \text{ alors } b < d \text{ (proposition 14);}$$

$$\text{pour tout entier } m, \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \text{ (proposition 15);}$$

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ alors } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (proposition 16);}$$

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ alors } \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d} \text{ (proposition 18).}$$

L'encadré 7 donne l'exemple d'une démonstration originale d'Euclide et sa traduction en notations modernes.

Euclide démontre la proposition 18 par une réduction à l'absurde et utilise implicitement l'existence d'une quatrième proportionnelle x pour trois grandeurs a, b, c données, c'est-à-dire telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Cette existence n'est

démontrée que dans le cas particulier où les grandeurs sont des longueurs rectilignes (proposition 12 du Livre VI). Admettre l'existence de la quatrième proportionnelle pour des grandeurs plus générales n'est donc pas tout à fait légitime, et cela nous étonne de la part d'un auteur soucieux d'éviter toute référence à la géométrie et de déduire logiquement les propriétés des grandeurs de celles déjà établies. Or la démonstration rigoureuse de l'existence de la quatrième proportionnelle aurait exigé le concept mathématique de la continuité, dont les Grecs n'avaient qu'une vague intuition, qu'ils n'ont jamais réussi à formuler rigoureusement. Dedekind fut le premier à construire un domaine continu de grandeurs (1872).

L'application des aires

Le Livre VI applique la théorie des proportions du Livre V aux grandeurs rectilignes, à la géométrie plane et, en particulier, aux figures semblables, deux figures rectilignes étant semblables lorsque « *les angles sont égaux chacun à chacun* » et lorsque « *les côtés placés autour des angles égaux sont proportionnels* ». Euclide y utilise la célèbre définition 5 comme test de proportionnalité dans la démonstration de la première proposition établissant le fait que « *les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases* ». On y trouve aussi (propositions XXV à XXIX) le fondement de la technique de construction développée dans l'école de Pythagore et appelée *application des aires*. Elle englobe trois constructions différentes ne faisant intervenir que la règle et le compas. La première est appelée *application simple* ou « parabole » (cf. fig. 2 a) : il s'agit de construire une figure semblable à une figure donnée et égale à une autre figure elle aussi donnée. Concrètement, Euclide se donne un segment AD, un parallélogramme Δ et une aire c d'une figure rectiligne, puis construit sur AD un parallélogramme ADFI semblable à Δ dont l'aire soit égale à l'aire donnée c . Dans le cas de l'*application en défaut* ou « parabole en ellipse » (cf. fig. 2 b), il construit sur AD un parallélogramme d'aire donnée c qui soit défailant d'un parallélogramme semblable à Δ , c'est-à-dire que la base du parallélogramme construit ne recouvre pas entièrement le segment AD donné. Dans l'*application en excès* ou « parabole en hyperbole » (cf. fig. 2 c), le parallélogramme est construit sur le segment AD prolongé.

Or le parallélogramme donné pour la similitude est souvent un carré x^2 . L'application simple permet alors de construire le second côté x d'un rectangle. Les applications en excès et en défaut permettent de trouver une racine positive des équations du second degré $ax \pm x^2 = c$, c positif.

En effet, si au segment AD donné (cf. fig. 3) on applique un rectangle ACFI d'aire égale à une aire c donnée telle que l'aire en défaut CDJF soit

PROPOSITION 16

Théorème

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par permutation.

Soit les quatre grandeurs proportionnelles A, B, C, D; que A soit à B comme C est à D; je dis que ces grandeurs seront encore proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que A sera à C comme B est à D.

Prenons des équimultiples quelconques E et F de A et de B, et d'autres équimultiples quelconques G et H de C et de D.

Puisque E est le même multiple de A que F l'est de B, et que les parties comparées entre elles ont la même raison que leurs équimultiples, la grandeur A sera à B comme E est à F. Mais A est à B comme C est à D; donc C est à D comme E est à F. De plus, puisque G et H sont des équimultiples de C et de D, la grandeur C sera à D comme G est à H. Mais C est à D comme E est à F; donc E est à F comme G est à H. Mais si quatre grandeurs sont proportionnelles, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième. Donc, si E surpasse G, la grandeur F surpassera H; si E est égal à G, la grandeur F sera égale à H, et si E est plus petit que G, la grandeur F sera plus petite que H. Mais E et F sont des équimultiples quelconques de A et de B, et G et H sont d'autres équimultiples quelconques de C et de D; donc A est à C comme B est à D.

Donc, si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront encore proportionnelles par permutation; ce qu'il fallait démontrer.

Si m et n sont des entiers,

$$\text{alors} \quad \frac{A}{B} = \frac{mA}{mB}$$

$$\text{et} \quad \frac{C}{D} = \frac{nC}{nD} \quad (\text{prop. 15})$$

$$\text{Comme} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ on aura}$$

$$\frac{mA}{mB} = \frac{nC}{nD} \quad (\text{prop. 11})$$

Donc, si $mA > nC$ alors $mB > nD$,

si $mA = nC$ alors $mB = nD$,

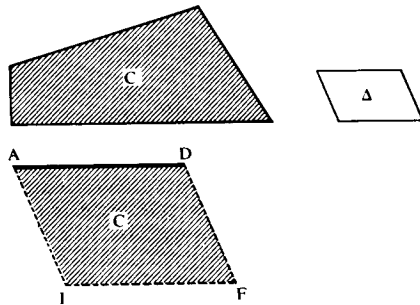
et si $mA < nC$ alors $mB < nD$,

mais cela implique (déf. V) que

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

Fig. 2 a et b

a) Application simple ou parabole



b) Application en défaut ou parabole en ellipse

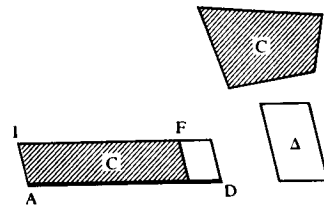


Fig. 2 c

c) Application en excès ou parabole en hyperbole

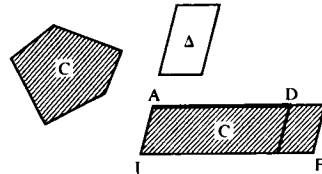
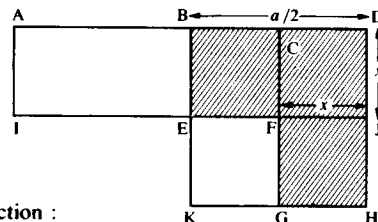
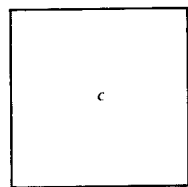
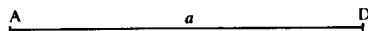


Fig. 3

Données :



Construction :

égale à un carré x^2 , l'aire du gnomon BDHGFE, où B est le milieu de AD, sera égale à l'aire du rectangle ACFI. L'aire gnomonique, étant égale à la différence des aires des carrés de côté $BD = \frac{a}{2}$ et $EF = \frac{a}{2} - x$, vaut (en termes algébriques modernes) :

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = ax - x^2.$$

L'aire du rectangle ACFI est par construction égale à c , mais vaut aussi $\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2} - x\right)x = ax - x^2$. Donc $ax - x^2 = c$ et la construction du gnomon permet de trouver une valeur de x .

Les Livres arithmétiques

Les Livres VII, VIII et IX constituent un traité de théorie des nombres; la théorie des proportions du Livre V y est appliquée aux nombres.

Des nombreuses propriétés des nombres étudiées par Euclide (parité, divisibilité, etc.), nous n'allons citer que la proposition 20 du Livre IX, qui établit l'existence d'une infinité de nombres premiers : « *Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude proposée de nombres premiers.* » La démonstration par l'absurde est celle qu'on trouve encore aujourd'hui dans les manuels d'algèbre.

Soient a, b, c, \dots, k des nombres premiers quelconques, $abc \dots k$ leur produit. Si l'on y ajoute l'unité, $abc \dots k + 1$ est premier ou ne l'est pas.

— Si oui, $abc \dots k + 1$ est un nombre premier qu'on ajoute à la multitude donnée.

— Si non, $abc \dots k + 1$ est, d'après un théorème du Livre VII, un multiple d'un nombre premier p ; p ne peut être un des nombres premiers a, b, c, \dots, k donnés :

Admettons que p soit parmi les nombres premiers donnés au départ; p divise alors leur produit. Or p divise aussi $abc \dots k + 1$, donc p doit aussi diviser la différence, qui est l'unité, ce qui n'est pas possible.

Donc p est différent des nombres premiers donnés et s'ajoute à la multitude.

Le Livre X, difficile à lire mais considéré comme un des plus subtils, contient une classification des quantités irrationnelles quadratiques et biquadratiques qui y sont représentées géométriquement par des droites et des rectangles. Euclide y démontre géométriquement des transformations que nous écrivons aujourd'hui :

$$\frac{1}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

et bien d'autres. Cette classification était devenue nécessaire vu le nombre croissant de grandeurs incommensurables que fournissaient les constructions

géométriques. Zeuthen pense que dans leurs recherches précises, les Grecs n'associaient pas de valeurs numériques à ces grandeurs, mais les utilisaient telles qu'ils les avaient obtenues, sous forme de segments de droite construits géométriquement. Or les droites représentant les grandeurs incommensurables se distinguent parfois difficilement entre elles et une classification des nombres correspondants s'imposait.

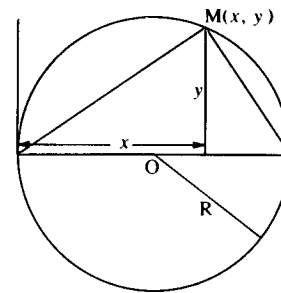
Le Livre XI aborde la géométrie dans l'espace. Le Livre XII, qui pourrait lui aussi remonter à Eudoxe, compare les aires curvilignes aux aires des polygones grâce à la méthode d'exhaustion (cf. chapitre 5). L'objet du Livre XIII est la construction des polyèdres réguliers (cf. encadré 4). La construction des solides platoniciens, qui semble clore l'enseignement des *Éléments*, a fait dire au commentateur Proclus qu'Euclide était un adepte de la philosophie de Platon.

Euclide n'est pas seulement l'auteur des *Éléments*, mais a rédigé également les *Données*, complément aux *Éléments*, la *Division du canon* sur les proportions musicales, un ouvrage perdu sur les sections coniques, *Les Lieux à la surface*, un ouvrage sur la division des aires, que cite Proclus, les *Porismes* (corollaires), dont témoignent Proclus et Pappus et des traités d'optique, de mécanique et d'astronomie.

9. Apollonius et les sections coniques

Comme Euclide, Apollonius de Perge est à la charnière de l'époque classique et de l'époque hellénistique. Bien qu'il soit à peu près certain que les activités des deux géomètres étaient liées à celles du premier siècle d'existence de l'école d'Alexandrie, leurs travaux se rattachent, par leur contenu et par leur esprit, à l'époque hellène. *Les Coniques*, seul ouvrage d'Apollonius qui subsiste, systématise et généralise les connaissances de ses prédécesseurs. C'est un traité d'une lecture difficile aussi bien par la mise en œuvre de méthodes empruntées à « l'algèbre géométrique » que par la forme purement rhétorique de son exposé, n'utilisant aucun symbolisme. L'étude des sections coniques en Grèce remonte au IV^e siècle avant J.-C. Ménechme, élève d'Eudoxe, contemporain de Platon, les aurait découvertes dans ses études sur la duplication du cube. En effet, Hippocrate de Chio avait ramené le problème à la recherche de deux moyennes proportionnelles x, y tels que

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ ($b = 2a$). Or ce dernier problème peut être résolu par l'intersection de deux paraboles, $x^2 = ay$ et $y^2 = xb$, ou par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole $xy = ab$. T. L. Heath pense que Ménechme aurait raisonné par analogie avec le cercle décrit comme lieu géométrique d'un point M de coordonnées (x, y) , où $y^2 = x(d - x)$ (cf. figure 4) et admis que la relation $y^2 = bx$, qui n'en diffère que par la substitution d'une constante à une des variables, représenterait un lieu géométrique, et c'est à ce moment qu'il aurait introduit le cône.



On a $y^2 = x(d - x)$ où $d = 2R$

Fig. 4

Après Ménechme, Aristée (seconde moitié du IV^e siècle?) s'intéressa aux coniques dans son ouvrage — aujourd'hui perdu — *Des lieux solides*; ces lieux ne seraient rien d'autre que les coniques. Ménechme et Aristée savaient que la section d'un cône par un plan perpendiculaire à sa génératrice donnait des courbes différentes selon que l'angle au sommet du cône était aigu, droit ou obtus. Les prédécesseurs d'Apollonius, y compris Archimède et Euclide, utilisaient la terminologie introduite par Aristée et parlaient de section du cône à angle aigu (ellipse), section du cône à angle droit (parabole) et section du cône à angle obtus (hyperbole). Apollonius innove en engendrant les trois coniques par l'intersection d'un même cône oblique à base circulaire par un plan variable. Selon que le plan sécant rencontre toutes les génératrices sur une même nappe du cône, est parallèle à l'une des génératrices ou rencontre les deux nappes du cône, on est en présence de l'ellipse, de la parabole ou de l'hyperbole. Apollonius établit la propriété caractéristique des sections coniques. Nous dirions aujourd'hui qu'il exprime leur équation dans le système de coordonnées ayant comme axes un diamètre de la courbe et la tangente à l'une des extrémités du diamètre. Transcrites en notations modernes, les propriétés caractéristiques des coniques s'expriment par les équations :

- 1) $y^2 = px$, (parabole);
- 2) $y^2 = x\left(p - \frac{p}{a}x\right)$, (ellipse);
- 3) $y^2 = x\left(p + \frac{p}{a}x\right)$, (hyperbole),

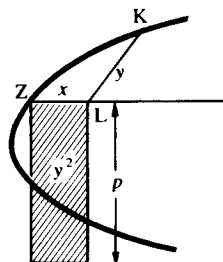
où a est la longueur du diamètre et p celle du paramètre (*latus rectum*).

Sa nouvelle approche lui permet de construire les trois courbes à l'aide de la technique de l'application des aires. Par extension, il nomme parabole la courbe obtenue en appliquant au segment de droite de longueur p donnée, un rectangle de côté x et d'aire égale au carré de côté y (cf. fig. 5 a). Si le rectangle de côté x et d'aire y^2 a une base trop courte de sorte qu'il doive être complété par un rectangle de côtés x et $\frac{p}{a}x$, la courbe sera une ellipse (cf. fig. 5 b) et si la base du rectangle dépasse la longueur de $\frac{p}{a}x$, la courbe

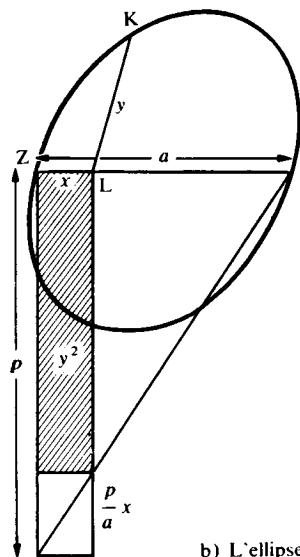
construite sera une hyperbole (cf. fig. 5c). Des huit livres qui constituent le traité, sept nous sont parvenus. Après la définition et la construction des trois coniques, Apollonius étudie leurs propriétés fondamentales (asymptotes, tangentes, foyers, diamètres conjugués, etc.).

En particulier, il démontre un théorème qui sera la base de la théorie des polaires (cf. p.132).

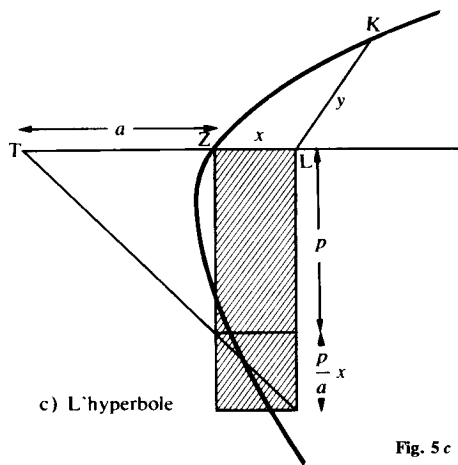
Fig. 5a et b



a) La parabole



b) L'ellipse



c) L'hyperbole

Fig. 5c

Outre ce traité sur les coniques, Apollonius a écrit une série d'autres ouvrages qui ont fait l'objet d'un commentaire de Pappus. Contrairement aux *Coniques*, qui exposent une théorie globale, ils étudient des problèmes particuliers.

10. L'école d'Alexandrie

Au III^e siècle avant J.-C., les cités grecques avaient perdu leur autonomie. Après la conquête de la Grèce par Philippe de Macédoine, elles furent obligées de renoncer à leurs principes démocratiques et d'obéir à un roi. Le fils de Philippe, Alexandre, unifia un immense empire sous son pouvoir et fit d'Alexandrie sa capitale. Sous le règne des premiers Ptolémée, Alexandrie devint le centre culturel du monde antique. Straton, élève d'Aristote, y organisa le Musée, communauté de savants payés par le roi pour se consacrer à la recherche scientifique. Le Musée comprenait une bibliothèque, dont les très riches collections — on parle de 700 000 volumes — étaient à la disposition des savants et des étudiants. Bien qu'issus parfois de milieux aisés et à la solde du roi, la plupart des pensionnaires enseignaient ou exerçaient un métier : médecin, arpenteur, architecte, etc.

Parmi les quatre disciplines étudiées au Musée — la littérature, les mathématiques, l'astronomie et la médecine —, les mathématiques occupaient une place de choix. L'école mathématique connut une intense et brillante activité au cours du premier siècle de son existence; elle débuta par une systématisation des connaissances de l'époque classique, à l'instar de la synthèse par Euclide des éléments de géométrie et de la présentation par Apollonius d'une théorie globale des sections coniques.

Ville nouvelle, sans traditions bien établies, Alexandrie est ouverte à des influences multiples : le Musée attire des savants du monde entier, les communautés grecque, égyptienne et juive s'y mélangent librement, le commerce florissant crée des liens avec des cultures lointaines et les marchands et explorateurs ramènent des pratiques nouvelles qui vont élargir l'horizon scientifique. Les Alexandrins ne méprisent guère les mathématiques appliquées, et la mécanique, l'optique, la géodésie, l'astronomie et la logistique prennent leur essor. Ils enseignent les opérations arithmétiques aussi bien selon la méthode littérale grecque que selon les techniques égyptiennes et adoptent dans leurs calculs astronomiques le système de numération à base 60 dérivé de la numération babylonienne.

Archimède et les épigones des grands géomètres

L'œuvre d'Archimède (né à Syracuse vers 287 avant J.-C.) est exemplaire de l'esprit alexandrin. On y voit la recherche de la rigueur alliée au souci de l'application juste. Inventeur génial et populaire, il était réputé dans tout le monde grec pour la construction de mécaniques subtiles et précises — leviers, pompes à eau, machines de guerre, etc. On raconte qu'il utilisa les propriétés des miroirs paraboliques pour faire converger les rayons de soleil sur les navires romains assiégeant Syracuse et mettre le feu à la flotte. Non

content d'être un habile mécanicien, Archimède établit également les principes de la mécanique théorique et fonda l'hydrostatique. Il se servit de ses connaissances en mécanique comme moyen d'investigation en géométrie, ainsi qu'il l'explique dans sa lettre à Ératosthène.

Ses travaux sur le calcul des aires et des volumes constituent l'apogée de la géométrie alexandrine. Nous les étudierons au chapitre 5. Par la méthode d'exhaustion, qui à l'aide d'inégalités décroissantes fournit de l'égalité une approximation aussi étroite que l'on voudra, il démontre avec élégance et rigueur des résultats pressentis par des considérations mécaniques : il calcule les centres de gravité, place des tangentes aux courbes, détermine des aires curvilignes, obtient les formules pour le volume du cylindre et de la sphère et établit des propriétés intéressantes des solides de révolution engendrés par des coniques.

Dans la *Mesure du cercle*, il cherche une bonne approximation de π , c'est-à-dire du rapport entre la circonférence et le diamètre du cercle. Il commence par démontrer que l'aire du cercle est égale à l'aire du triangle ayant la circonférence du cercle comme base et le rayon comme hauteur. Pour trouver la valeur de la circonférence, il inscrit dans le cercle des polygones réguliers à un nombre croissant de côtés et calcule leurs périmètres. Il utilise également les polygones circonscrits et détermine la valeur de π par l'encadrement suivant :

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Dans l'*Arénaire*, il met au point une méthode permettant d'exprimer en toutes lettres un nombre supérieur au nombre de grains de sable que contiendrait une sphère de diamètre égal à la distance entre le centre de la Terre et le ciel des étoiles fixes, ce qui dans le système littéral de numération grec constitue une performance.

Ératosthène de Cyrène, célèbre pour sa mesure du méridien terrestre, et l'astronome Aristarque de Samos, qui défendait l'idée d'un système héliocentrique, ont également pu évoluer dans le milieu alexandrin.

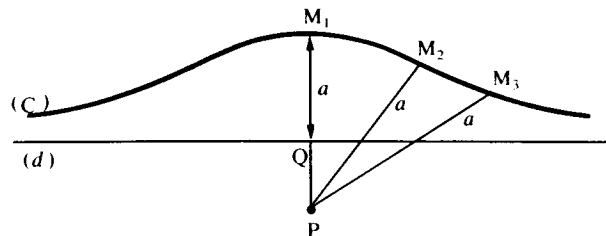
La riche période initiale est suivie d'une longue période d'analyse, d'approfondissement et d'exploitation. Euclide, Apollonius et Archimède ont poussé la géométrie grecque à un niveau qu'il était difficile de dépasser avec les méthodes anciennes. Les éléments de la planimétrie étaient épuisés; l'étude des sections coniques ne pouvait être poussée plus en avant dans le champ de la mathématique grecque. En stéréométrie, des progrès étaient possibles depuis qu'Archimède avait, par ses recherches sur la spirale, ouvert la voie à l'étude des courbes transcendantes, que les géomètres classiques avaient négligées puisqu'ils s'intéressaient exclusivement aux courbes constructibles au moyen de la règle et du compas. Ainsi Nicomède (vers 200 avant J.-C.) définit et étudie la conchoïde de droite (cf. encadré 8); il aurait conçu une mécanique permettant de la construire.

Dioclès (fin du II^e siècle avant J.-C.), toujours dans le cadre de la résolution du problème de la duplication du cube, invente la cissoïde afin de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données.

Zénodore inaugure l'étude d'un nouvel objet géométrique en considérant les figures isopérimètres, c'est-à-dire les figures ayant même périmètre. Outre son importance théorique, cette étude avait une grande portée pratique. En effet, Proclus rapporte que certaines communautés dupaient leurs membres en leur attribuant des parcelles de terrain à grand périmètre et à petite surface.

Hypsiclès d'Alexandrie aurait ajouté (vers 180) un XIV^e livre aux *Éléments* d'Euclide; il y indique la construction du dodécaèdre (polyèdre à 12 faces) et de l'icosaèdre (20 faces) réguliers (cf. encadré 5).

8. La conchoïde de Nicomède



La conchoïde (C) de la droite (d) par rapport à P et $a > 0$ est le lieu géométrique (C) des points M alignés avec P et Q lorsque Q décrit la droite (d) et tels que $MQ = a$. M_1, M_2, M_3 sont des points de la conchoïde.

Trigonométrie sphérique

Les épigones des grands géomètres effectuent leurs recherches dans le cadre posé par la géométrie classique et se tournent naturellement vers ses applications. L'astronomie est leur domaine privilégié. Le postulat géométrique de la sphéricité des cieux et la découverte de celle de la Terre réclamaient un outil adapté, la trigonométrie sphérique. Hipparque (II^e siècle avant J.-C.) est supposé en être le fondateur. On lui attribue la construction d'une table de cordes du cercle. Ménélaüs, astronome à Rome au I^{er} siècle de notre ère, rédige un traité en trois livres, *les Sphériques*, où il étudie systématiquement les propriétés des triangles sphériques et construit la géométrie sphérique.

Dans la *Syntaxe mathématique* ou l'*Almageste*, Claude Ptolémée (mort en 168) étend les résultats d'Hipparque et de Ménélaüs et indique des procédés généraux et rigoureux pour le calcul des cordes sous-tendant les arcs d'un cercle. Il fonde son astronomie sur les théorèmes de trigonométrie qu'il a énoncés et démontrés au préalable, sans pourtant présenter un exposé global de la trigonométrie. L'*Almageste* devait être le livre de référence des astronomes jusqu'à l'abandon de la conception géocentrique de l'Univers.

Arithmétique et algèbre, premiers pas vers l'autonomie

C'est à Alexandrie que l'arithmétique et l'algèbre se sont peu à peu détachées de la géométrie et ont fait un premier pas vers un développement autonome. Cette tendance, déjà sensible dans les travaux arithmétiques d'Archimède, d'Apollonius et de Ptolémée, s'affirme dans les travaux d'Héron, de Nicomaque de Gérase et surtout de Diophante.

Dans les *Métriques*, ouvrage consacré à la mesure des aires et des volumes et plus généralement à la géodésie, Héron rompt avec la tradition hellène et n'identifie plus les nombres aux grandeurs géométriques qui les représentent, mais calcule avec les nombres eux-mêmes. La géodésie étant enseignée dans un but pratique aux arpenteurs, aux maçons et autres artisans, Héron ne put se contenter des méthodes géométriques rigoureuses qui lui interdisaient de multiplier deux aires, de calculer des racines carrées et cubiques, mais y allia les techniques babyloniennes de calcul et les procédés approximatifs des arpenteurs égyptiens.

Une évolution analogue se dessine en algèbre. Vers le début de notre ère apparaissent des recueils de problèmes qui sont résolus par des techniques algébriques. Le plus important et le plus original est de loin *les Arithmétiques* de Diophante (cf. chapitre 3).

Les commentateurs

Diophante vivait à une époque où les mathématiques alexandrines perdaient leur puissance créatrice. Son œuvre constitue la dernière contribution originale. Des commentateurs érudits — dont nous avons déjà cité quelques-uns — remplacent désormais les inventeurs; parmi ceux-ci, Pappus (vers 300) est le plus brillant. Beaucoup de textes classiques nous sont parvenus à travers sa *Collection mathématique*. Proclus a analysé le Livre I des *Éléments* d'Euclide, Eutocius les œuvres d'Archimède et d'Apollonius. Hypatie, fille de Théon d'Alexandrie, est à l'origine d'une réédition des *Éléments* d'Euclide (au IV^e siècle). Membre de l'école néo-platonicienne fondée à Alexandrie au milieu du III^e siècle et opposée au christianisme, elle fut victime du fanatisme des chrétiens et assassinée par une foule hostile au savoir païen des Grecs. Sa mort symbolise la fin de l'école d'Alexandrie, celle de la culture hellénistique.

En fait, l'école d'Alexandrie périclita depuis la mort de Cléopâtre (en 31 avant J.-C.), lorsque l'Égypte devient une simple province romaine. Les romains n'encouragent guère les activités scientifiques, la plupart des églises chrétiennes les condamnent, faisant brûler les traités païens par milliers. Lorsque les musulmans s'emparent en 640 d'Alexandrie, les collections du Musée étaient décimées et toute vie scientifique avait pratiquement cessé d'exister.

Ouvrages originaux d'accès aisé

- Caveing M., *Zénon d'Élée, Prolégomènes aux doctrines du continu*, étude historique et critique des Fragments et Témoignages, Paris, Vrin, 1982.
Euclide, *Éléments de géométrie*, trad. F. Peyrard, réimprimée chez Blanchard, Paris, 1966.
Itard J., *Les Livres arithmétiques d'Euclide*, Paris, Hermann, 1961.
Ver-Eecke P., *Les Coniques d'Apollonius*, Bruxelles, 1923.

Quelques références qui nous ont particulièrement guidées

- Desanti J.-T., *Genèse de la mathématique*, séminaire à Paris-VII, 1975-1976.
Heath T. L., *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921.
Heiberg J. L., *Geschichte der Mathematik im Altertum*, Munich, Beck, 1925.
Michel P.-H., *Les Nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne*, conférence du palais de la Découverte, série D n° 56, Paris, 1958.
Vernant J.-P., *Mythe et Pensée chez les Grecs*, Paris, Maspero, 1965.

3. La constitution de l'algèbre classique

A l'origine, l'algèbre ne se distingue guère de l'arithmétique, elle-même dans un état très primitif. Longtemps avant que le terme n'apparaisse existent quelques recettes stéréotypées qui constituent les rudiments d'une technique de résolution de problèmes pratiques.

Lentement, le processus historique de dégagement des règles du calcul algébrique abstrait — calcul portant sur des expressions contenant une inconnue — se développe, intimement mêlé à celui de l'élaboration de l'arithmétique. Les règles et les recettes se muent en une méthodologie, dont l'objet quasiment exclusif reste la théorie des équations, jusqu'au début du XIX^e siècle.

Au cours de ce double développement, un système de notations des opérations de l'arithmétique et du calcul algébrique s'ébauche et se précise et les ensembles sur lesquels travaillent arithméticiens et algébristes s'élargissent progressivement, passant des entiers naturels à l'ensemble des rationnels positifs, puis à des extensions quadratiques de celui-ci et, à peu près à la même époque, à quelque chose de proche de notre ensemble des nombres réels, enfin aux nombres négatifs et aux nombres complexes.

Nous retraçons ici les grandes étapes de la constitution de cette algèbre classique, liée à ses débuts à l'arithmétique.

1. Les équations affines et quadratiques dans les premières civilisations antiques

Dès la plus haute antiquité on rencontre, à l'occasion de problèmes concrets, des exemples que l'on peut interpréter comme étant des cas de résolution d'équations du premier et du second degré.

Les Babyloniens

Dans les tablettes babyloniennes, il s'agit de problèmes numériques, exprimés de façon entièrement rhétorique, c'est-à-dire sans aucune notation symbolique, mais en mots et en phrases, et dont la solution se présente comme une suite de règles à effectuer en l'absence de toute justification (cf. encadré 1).

Les Babyloniens utilisent un langage géométrique, l'inconnue x est

1. Exemple de problème babylonien

	Traduction en numérotation décimale	Schéma général
— La surface du carré ajoutée au côté égale 45'.	$x^2 + x = \frac{3}{4}$	$x^2 + px = q$
— Tu poseras 1 l'unité.	1	p
— Tu fractionneras 1 en deux : 30'	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{p}{2}$
— Tu croiseras par 30' : 15'.	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{p^2}{4}$
— Tu ajouteras 15' à 45' : 1.	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$	$\frac{p^2}{4} + q = \delta$
— C'est le carré de 1.	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{\delta}$
— Tu soustrairas de 1, les 30' que tu as croisés : 30'.	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\delta} - \frac{p}{2}$
— C'est le côté du carré.	$x = \frac{1}{2}$	$x = \sqrt{\delta} - \frac{p}{q}$

appelée le côté, et sa puissance deux, x^2 , est le carré. Quand deux inconnues interviennent, elles se nomment longueur et largeur et leur produit est l'aire. Mais, en dépit de cette terminologie, ils n'hésitent pas à soustraire un côté d'une aire. Ainsi, le texte 13 901 du British Museum : « *J'ai soustrait le côté d'un carré de l'aire et le résultat est 14,30* » peut se traduire algébriquement par l'équation $x^2 - x = 14,30$.

Ce non-respect de la loi d'homogénéité est remarquable. Dans la période post-hellénique, il sera assez exceptionnel et les algébristes mettront des siècles à s'émanciper de la référence contraignante à la géométrie.

L'historien Goetsch a fait une analyse des types d'équations que l'on peut trouver chez les Babyloniens et des méthodes pour les résoudre. Celles-ci sont à peu près constantes depuis le haut âge babylonien (depuis 1800 avant J.-C.) jusqu'à l'époque de l'empire séleucide (vers 300 après J.-C.); on trouve des équations linéaires en une inconnue, des systèmes d'équations linéaires en deux inconnues comprenant une équation linéaire et une équation quadratique comme :

$$x \pm y = a \quad \text{et} \quad xy = b,$$

ou
$$x \pm y = a \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = b.$$

Dans le cas des systèmes, la méthode générale est de résoudre une des

équations par rapport à une inconnue, et d'effectuer une substitution dans les autres. Apparaît quelquefois la méthode dite du « plus ou moins » : si on a $x + y = a$ et une deuxième équation en x et y , on pose $x = \frac{a}{2} + s$ et $y = \frac{a}{2} - s$.

Après substitution dans la deuxième équation, on obtient une équation quadratique en s . De même, si $x - y = a$, les Babyloniens posent

$$x = s + \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad y = s - \frac{a}{2}.$$

Notons que cette méthode est présente à plusieurs reprises dans les problèmes arithmétiques de Diophante. Les équations quadratiques les plus fréquentes sont du type $x^2 - ax = b$ et $x^2 + ax = b$, et la suite des règles numériques à effectuer dans ces deux cas suit toujours l'application de la formule que nous connaissons bien (depuis Al-Khwarizmi), à savoir $\frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2} + \frac{a}{2}$ dans le premier cas et $\frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2} - \frac{a}{2}$ dans le deuxième cas.

Très probablement, les Babyloniens trouvaient leurs solutions en ajoutant $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ des deux côtés de l'équation et en appliquant les identités $\left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Les solutions négatives des équations quadratiques sont évidemment inexistantes.

Les calculateurs babyloniens n'utilisent pas les nombres réels, mais les nombres exprimables d'une façon finie en base 60 (qui forment un anneau). Dans la résolution des équations quadratiques, il faudra donc que l'extraction de la racine carrée soit possible dans cet anneau, ainsi que la division finale par le coefficient de x^2 , si celui-ci n'est pas l'unité. Pour extraire les racines carrées, ils comparaient avec les tables établies de carrés. De même, on trouve quelques exemples d'équations cubiques comme $x^3 = a$, $x^2(x + 1) = a$, dont la solution, là aussi, repose sur la comparaison avec des tables donnant les cubes, ou les sommes de carrés et de cubes, pour différentes valeurs de nombres, toujours exprimés en numération sexagésimale. On a aussi repéré un exemple de système dont la résolution équivaut à une équation du sixième degré, mais quadratique en x^3 .

Quelques autres éléments sont intéressants. Ainsi, O. Neugebauer a découvert deux séries :

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^{10} - 1$$

$$\text{et} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = \left[1 \left(\frac{1}{3}\right) + 10 \left(\frac{2}{3}\right)\right] \cdot 55$$

dans une tablette datant de l'empire de Nabuchodonosor (env. 580 avant J.-C.) de la collection du Louvre. Peut-être les Babyloniens connaissaient-ils certaines séries élémentaires, comme :

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

L'analyse de la fameuse *tablette Plimpton 322* de la collection de l'université Columbia, effectuée par Neugebauer en 1945, laisserait penser que les Babyloniens connaissaient les triplets pythagoriciens x, y, z tels que $z^2 = x^2 + y^2$. Mais les déterminaient-ils par la formule générale

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2?$$

Sur ce point, les choses restent controversées.

Plusieurs spécialistes affirment le caractère fondamentalement algébrique des connaissances mathématiques babyloniennes : dans les problèmes, la relation algébrique constituerait le point d'intérêt majeur, au-delà même du fait que la solution d'un problème est en général un résultat pratique applicable. Il semble bien que les Babyloniens aient manipulé très habilement les types d'équations traités. Néanmoins, il est difficile de considérer ces débuts autrement que comme un simple outil, avec des règles précises d'utilisation. Et l'absence de toute formulation d'une méthodologie générale interdit d'envisager cet outil comme une discipline autonome.

Les Égyptiens

Parler d'algèbre égyptienne est sans doute beaucoup plus impropre encore que d'évoquer l'algèbre babylonienne. Parmi la centaine de problèmes contenus dans les *Papyrus Rhind* et de *Moscou* vers 1700 avant J.-C., nombreux sont ceux qui proviennent de la vie quotidienne et concernent la répartition de miches de pain, de grains ou d'animaux. Ils sont en général résolus par l'arithmétique seule ou par l'utilisation d'équations linéaires de type :

$$x + ax = b$$

ou

$$x + ax + cx = b.$$

Toute la difficulté réside, pour les Égyptiens, dans le choix des unités de mesure et de leurs subdivisions. En effet, outre la fraction $2/3$, les Égyptiens ne calculent que sur les quantièmes ou fractions du numérateur 1 (cf. encadré 2). Généralement, la solution de telles équations utilise la méthode de *fausse position*. Ainsi, par exemple: « *Quand le scribe te dit 10 est*

les 2/3 et le 1/10 de quoi? » La mise en équation conduit à $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$. Si

l'on prend 30, les $2/3$ font 20, le $1/10$ fait 3 et le total 23. Or comme on veut 10, par quoi faut-il multiplier 23, pour avoir 10? Cette méthode de fausse position se trouve aussi très nettement en évidence chez les Chinois. Elle sera répandue en Occident par les Arabes sous le nom d'Al-Khatayn, « *la chinoise* ».

Seuls quelques types simples d'équations quadratiques sont résolus comme $ax^2 = b$. Les rares cas où apparaissent deux inconnues comme dans le système $x^2 + y^2 = a$ et $y = bx$, conduisent, après élimination de l'inconnue y , au même type d'équation.

Quelques symboles rudimentaires sont présents dans le *Papyrus Ahmes* : l'addition et la soustraction sont représentées par une paire de jambes dans deux positions différentes et un autre signe est utilisé pour noter la racine carrée; l'inconnue est désignée par « *aha* ».

Mais l'algèbre des Égyptiens est très limitée, plutôt réduite à un

2. Problème 40 du Papyrus Rhind

Exemple de progression arithmétique et méthode de fausse position

Distribuer 100 miches de pain parmi 5 personnes de façon que le $\frac{1}{7}$ du total des trois dernières égale le total des deux premières. Quelle est la différence?

Partant du $5\frac{1}{2}$ comme différence et 1 comme premier terme, la première approximation fournit : 1, $6\frac{1}{2}$, 12, $17\frac{1}{2}$, 23, qui a 60 pour somme, c'est-à-dire les $\frac{2}{3}$ de 100.

On ajoute donc à chaque terme les $\frac{2}{3}$ de lui-même et on obtient la solution : $1\frac{2}{3}$, $10(\frac{2}{3} + \frac{1}{6})$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$, dont la somme est 100.

processus purement arithmétique. Elle s'applique souvent à des problèmes concernant la géométrie et à l'établissement des formules de mesure nécessaires pour calculer l'aire de figure planes et certains volumes.

2. « L'algèbre géométrique » euclidienne

Au cours de l'époque grecque classique, la géométrie a occupé une place privilégiée. Elle est par excellence la science dans laquelle s'exerce le caractère déductif du raisonnement, l'art de la démonstration, tandis qu'en théorie des nombres on en est réduit pendant longtemps au procédé de la généralisation par simple induction (depuis Pythagore jusqu'à Nicomaque de Gérase au I^{er} siècle après J.-C.). Quant aux tendances calculatrices et pratiques, caractéristiques des mathématiques babyloniennes, elles ne sont pas supprimées pour autant. L'exercice sur des problèmes concrets de la *logistique*, véritable art du calcul, est même recommandé par Platon pour l'instruction des enfants, « en sorte qu'on les oblige, en les amusant, de recourir à la science des nombres ». Mais elle ne jouit pas du noble prestige de science.

On a vu que la méthode d'application des aires à l'œuvre dans les Livres II et VI des *Éléments* d'Euclide correspond, quand on la transcrit en formules algébriques modernes, à la construction géométrique de grandeurs, qui sont racines de certaines équations du second degré. Le plus souvent, il s'agit de la recherche concrète de deux grandeurs dont on connaît la somme (ou la différence) et le produit (cf. chapitre 2, page 63).

À la suite de Paul Tannery, on a coutume d'appeler *algèbre géométrique* cet ensemble de méthodes et de résultats. Celui-ci trouvait aussi dans la théorie des irrationnelles du Livre X des *Éléments*, le détail de la solution géométrique de l'équation bicarrée et même le commencement de l'équation tricarrée, voyant dans la nomenclature des irrationnelles un palliatif au manque de notations algébriques des Grecs.

Enfin, à la suite de ses travaux sur les tablettes babyloniennes, Neugebauer a fait remarquer une corrélation étroite entre leur algèbre numérique et les propositions du Livre VI, et postulé que toute filiation ne pouvait être absente. Tout cela signifie-t-il que l'*algèbre géométrique* euclidienne ne serait qu'un vêtement géométrique à des préoccupations de

nature arithmétique, voire algébrique, héritées de l'époque préhellénique? Cette interprétation est à son tour vivement contestée par d'autres spécialistes des mathématiques grecques.

Le terme d'algèbre pour une époque où la recherche de l'inconnue n'est pas encore explicite, et encore moins l'étude des « équations », doit être utilisé avec prudence. En revanche, les méthodes de construction géométrique des livres II et VI auront une influence durable, y compris chez les fondateurs et les législateurs arabes de la théorie des équations quadratiques, puis cubiques.

Pour le sujet de ce chapitre, l'autre moment le plus significatif de l'Antiquité grecque est l'époque de Diophante, où prédomine cette fois la voie d'inspiration arithmétique. Des travaux comme ceux d'Archimède, d'Apollo-nius, de Ptolémée ont pu préparer l'intérêt des Alexandrins au début de notre ère pour ces questions.

3. Les Arithmétiques de Diophante

Avec Diophante, un nouveau chapitre des mathématiques s'ouvre et il est impossible de mettre en lumière le courant dont il est l'aboutissement. La vie de Diophante est très peu connue, et la période précise pendant laquelle il a vécu reste contestée (III^e siècle après J.-C.). Sa grande œuvre, les *Arithmétiques*, devait comprendre, d'après ce qu'il écrit lui-même dans l'introduction, treize livres.

Depuis le XVI^e siècle, seuls six livres étaient connus. Ils provenaient d'un manuscrit grec découvert en 1464 par Regiomontanus à Venise, qui était la copie d'un manuscrit plus ancien. On ne savait exactement où placer les sept livres manquants dans l'organisation générale de l'ouvrage. Son grand désordre apparent, qui pouvait être dû aux diverses transcriptions et interventions des commentateurs ultérieurs, a donné lieu à plusieurs interprétations contradictoires au XIX^e siècle.

Aujourd'hui, la lecture de Diophante risque d'être bouleversée et l'étude et l'analyse de son œuvre entièrement renouvelées. En effet, quatre des livres arithmétiques de Diophante, découverts et identifiés en Iran (1972), viennent de paraître en France.

Les livres arabes portent les numéros 4, 5, 6 et 7, et une première analyse de R. Rashed semble indiquer qu'ils suivent le Livre III grec. De façon générale, le problème du nombre et de l'ordre des livres des *Arithmétiques* doit être repris complètement par les historiens des mathématiques. Surtout, l'œuvre de Diophante a toutes chances de se révéler plus importante encore qu'on ne l'avait pensé.

Les *Arithmétiques* ne sont pas un livre d'arithmétique théorique au sens des pythagoriciens, qui réservaient ce terme d'arithmétique à la théorie des nombres, considérée comme une discipline sans méthode fixe, mais requérant de l'esprit une sorte de divination intuitive. Ils s'apparentent plutôt à la tradition de l'arithmétique calculatoire ou logistique. Pourtant, au moment où Diophante composait son ouvrage, cette distinction primitive semble caduque : d'abord, à cause du titre même choisi et, surtout, parce que la présentation des problèmes pratiques est toujours, dans leur première formulation, abstraite et les données numériques ne sont spécifiées qu'après.

Cet énoncé abstrait et général distingue radicalement Diophante des mathématiciens babyloniens.

Il est raisonnable de considérer les *Arithmétiques* comme une compilation analogue à celle des *Éléments* d'Euclide, rédigée par un auteur unique, mais fruit d'une tradition plus collective.

Les six livres grecs se présentent comme une collection de 189 problèmes tous numériques, accompagnés de leurs solutions.

La forme syncopée

Dans la préface, Diophante énumère parmi les nombres les carrés, les cubes, les bicarrés, les carrés-cubes, enfin les cubo-cubes.

Notons que la nomenclature des puissances est basée sur l'addition des exposants, c'est-à-dire qu'un carré-cube est un carré multiplié par un cube, soit $x^2 \cdot x^3 = x^5$, alors que les Arabes (sauf Al-Karagi) et après eux les algébristes italiens utiliseront une nomenclature fondée sur la multiplication des exposants. Il indique que la combinaison de bien des problèmes arithmétiques résulte des opérations sur ces diverses espèces de nombres. Il introduit des symboles pour ces puissances, symboles qui seront utilisés aussi pour les puissances des inconnues, sauf pour la puissance deux. La présence de puissances de l'inconnue supérieures à trois confirme l'indépendance par rapport à des motivations purement géométriques.

L'inconnue x est définie comme multiplicité indéterminée d'unités, mais cela veut dire valeur pouvant être rationnelle; elle est simplement appelée *nombre*. Les autres nombres qui ne sont pas des coefficients des inconnues sont appelés unités et notés \bar{M} . Un signe de soustraction apparaît, alors que l'addition s'exprime par une simple juxtaposition de symboles. Enfin, il insère le terme « *partie de* » entre deux expressions algébriques pour remplacer la barre de fraction (cf. encadré 3).

Le nombre des inconnues peut aller jusqu'à six, mais Diophante ne peut en représenter qu'une seule. Quand il y en a plusieurs, il parle de la première, de la deuxième, de la plus grande, de la plus petite... ou exprime les inconnues par élimination en fonction de l'une d'elles. Le texte peut être, là, très obscur.

Diophante a écrit son œuvre dans la forme classique du discours continu. Mais il abrège un peu ce verbalisme en utilisant systématiquement certaines abréviations pour les puissances de nombres, ainsi que pour les opérations, et remplace quelques mots très fréquents par leurs lettres initiales ou finales. Mais ces abréviations ne sont jamais elles-mêmes l'objet de manipulations algébriques. Ce stade d'évolution de l'écriture algébrique, intermédiaire entre le stade purement rhétorique et le stade du symbolisme algébrique que nous verrons s'achever au XVII^e siècle, a été appelé *l'algèbre syncopée*.

Problèmes déterminés

Le Livre I et les sept premiers problèmes du Livre II grec sont consacrés plutôt aux problèmes déterminés du premier et du second degré, à une ou plusieurs inconnues. Voici un exemple : « *Trouver deux nombres tels que leur*

3. L'écriture syncopée de Diophante

L'inconnue (notre x) est désignée par S

x^2	Δ^\top
x^3	K^\top
x^4	$\Delta^\top \Delta$
x^5	ΔK^\top
x^6	$K^\top K$

La soustraction est notée \bar{M}

Diophante emploie le système des nombres des Grecs.

Exemple : la fraction

$$2x^3 + 3x^2 + x / x^2 + 2x + 1$$

sera notée $K^\top \bar{\beta} \Delta^\top \bar{\gamma} S \bar{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\nu\mu\omicron\rho\iota\omega$ $\Delta^\top \bar{\alpha} S \bar{\beta} \bar{M} \bar{\alpha}$
(partie de)

somme et leur produit forment des nombres donnés. Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres; chose qui est d'ailleurs figurative.

« *Proposons que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités...* » (1, 27).

Diophante procède ainsi : il suppose que la différence des deux nombres est deux *arithmes* (arithme désignant l'inconnue), disons $2d$. Ces deux nombres sont alors $10 + d$ et $10 - d$. On a $(10 + d)(10 - d) = 96$, soit $100 - d^2 = 96$ et $d = 2$.

En formalisme moderne, si x et y sont les nombres cherchés, on pose :

$$x + y = 20,$$

$$xy = 96,$$

$$x - y = 2d,$$

alors

$$x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = 10 + d,$$

$$y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = 10 - d.$$

On obtient : $xy = 100 - d^2 = 96$, d'où $d = 2$.

Le premier nombre vaut $10 + 2 = 12$, le second $10 - 2 = 8$. Nous reconnaissons ici la méthode du « plus et du moins » utilisée par les Babyloniens.

La condition de possibilité s'exprime donc par la relation

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - xy = \text{nombre carré.}$$

Elle ne vise chez Diophante qu'à l'obtention exclusive de solutions rationnelles positives.

En effet, si nous posons $x + y = a$ et $xy = b$, on aura les valeurs $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, qui seront rationnelles si $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b =$ nombre carré, qui, par substitution, donne $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy =$ nombre carré.

Si nous avons commencé par cet exemple très simple, c'est qu'on y retrouve le problème des *Éléments* d'Euclide, consistant à chercher deux nombres dont la somme et le produit sont connus. On constate d'emblée l'absence de référence à toute construction géométrique et un début d'algorithme résolutif qui apparente incontestablement Diophante aux mathématiques babyloniennes. Cette procédure résolutive se retrouve dans plusieurs problèmes analogues, ceux qui consistent en la résolution de systèmes d'équations à deux inconnues et conduisent par élimination à une équation quadratique. En effet, les équations quadratiques manquent en tant que telles, bien que Diophante ait promis dans l'introduction de les traiter, et que plusieurs exemples prouvent qu'il était familier avec leur résolution, sans pourtant qu'on puisse jamais affirmer que Diophante possédait la *formule* résolutive du trinôme.

Les coefficients des équations sont toujours des nombres rationnels positifs, souvent entiers et, si l'équation n'a pas de racine rationnelle positive, Diophante la rejette et la déclare absurde; à moins qu'il ne modifie alors les valeurs numériques pour la rendre résoluble, à son sens. Contrairement à Héron d'Alexandrie ou à Archimède, qui admettent, dans la résolution de problèmes géométriques, les nombres irrationnels qu'ils cherchent ensuite à approcher, Diophante s'affirme ici plus arithmétique et algébriste. Pour lui, le statut des nombres est limité aux rationnels positifs. Évidemment, une solution négative est impensable.

Enfin, si l'équation du second degré a deux racines admissibles, Diophante soit n'en mentionne qu'une, soit, s'il a trouvé les deux solutions par des procédures distinctes, ne cherche pas à les réunifier en une présentation générale.

Équations indéterminées

Les cinq autres livres sont principalement consacrés aux équations *indéterminées*, c'est-à-dire des équations et systèmes d'équations à plusieurs inconnues et admettant en général un grand nombre de solutions. Là aussi, Diophante se restreint exclusivement aux solutions rationnelles. On peut dire que c'est le sujet le plus neuf des *Arithmétiques* de Diophante. (Aujourd'hui, c'est l'étude des solutions entières de ce type d'équations indéterminées que l'on appelle l'analyse diophantienne.)

Parmi les exercices indéterminés, et devant la très grande hétérogénéité des problèmes, nous mentionnons quelques types au hasard; comme l'usage s'est imposé depuis la fin du siècle dernier, nous rapportons ici l'énoncé des problèmes, à l'origine purement verbal, sous la forme d'équations algébriques :

$$\begin{cases} x + a = \alpha^2 \\ x + b = \beta^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 3 \\ b = 2 \end{matrix} \quad (\text{II}, 10)$$

$$\begin{cases} xy - x = \alpha^2 \\ xy - y = \beta^2 \end{cases} \quad \alpha + \beta = a \quad a = 5 \quad (\text{II}, 27)$$

$$\begin{cases} x^3 + y = \alpha^3 \\ y^2 + x = \beta^3 \end{cases} \quad (\text{IV}, 18)$$

$$\begin{cases} (x + y + z)^3 + x = \alpha^3 \\ (x + y + z)^3 + y = \beta^3 \\ (x + y + z)^3 + z = \gamma^3 \end{cases} \quad (\text{V}, 15)$$

Nous analysons un exemple dans l'encadré 4.

On a pu dire qu'après avoir étudié cent solutions de Diophante, il est impossible de prévoir la cent unième; et, en effet, chacun des 189 problèmes est traité de façon spécifique par un choix judicieux d'inconnue auxiliaire, avec des artifices brillants de calculs, qui tiennent compte des propriétés particulières des nombres, choisis comme valeurs numériques. Les fractions les plus compliquées n'effraient pas Diophante et il manifeste un goût certain pour le calcul.

De façon générale, pour les systèmes indéterminés, il procède par réduction du nombre des inconnues en leur substituant des valeurs rationnelles arbitraires ou par le choix d'inconnues auxiliaires. Ainsi, certains problèmes indéterminés changent de caractère au cours de leur solution, car la détermination arbitraire que reçoit une ou plusieurs inconnues les ramène à des problèmes déterminés (cf. encadré 4). Il ne donne jamais la famille complète des solutions.

Si aucun résultat de nature générale n'est formellement énoncé dans les *Arithmétiques*, Diophante se réfère explicitement à des lemmes peut-être démontrés dans un ouvrage intitulé *les Porismes* et entièrement perdu. Il s'agit d'identités que l'on peut qualifier d'algébriques, comme :

$$[(m - n)/2]^2 + mn = [(m + n)/2]^2,$$

ou

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

qui est l'identité des triplets pythagoriciens.

Par exemple, dans un problème du Livre III grec, Diophante a besoin de construire quatre triangles rectangles de même hypoténuse. Il part de deux triplets pythagoriciens : 3, 4, 5 et 5, 12, 13, et, en multipliant chaque « triangle » par l'« hypoténuse » de l'autre, en déduit deux nouveaux triplets pythagoriciens 39, 52, 65 et 25, 60, 65.

Mais, écrit Diophante, 65 s'écrit aussi comme 16 + 49 et 64 + 1, « ce qui provient de ce que le nombre 65 est le produit de 13 et de 5, lesquels se partagent respectivement en deux carrés ».

En fait, il utilise ici l'identité :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2,$$

avec

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = 2, \quad d = 3,$$

4. Exemple de problème indéterminé de Diophante (III, 4)

« Trouver trois nombres tels que le carré de la somme de ces trois nombres, retranché de chacun de ces nombres, forme un carré. Posons que la somme de ces trois nombres soit un arithme. »

Les conditions du problème se traduisent par :

$$X - (X + Y + Z)^2 = \alpha^2$$

$$Y - (X + Y + Z)^2 = \beta^2$$

$$Z - (X + Y + Z)^2 = \gamma^2$$

Diophante pose $X + Y + Z = x$, d'où $(X + Y + Z)^2 = x^2$.

Ensuite, il détermine le problème en posant arbitrairement

$$X = 2x^2, Y = 5x^2, Z = 10x^2,$$

qui vérifient les trois équations puisque alors $\alpha^2 = x^2$, $\beta^2 = 4x^2$, $\gamma^2 = 9x^2$.

Puis il substitue dans la relation $X + Y + Z = x$.

Il vient $2x^2 + 5x^2 + 10x^2 = x$

$$17x^2 = x \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{17}, \quad x^2 = \frac{1}{289}.$$

La solution de Diophante est :

$$X = \frac{2}{289}, \quad Y = \frac{5}{289}, \quad Z = \frac{10}{289}.$$

qui donne :

$$5 \times 13 = 65 = 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2.$$

Il en déduit ensuite par l'identité des triplets pythagoriciens,

avec $m = 7$, $n = 4$ et $m = 8$, $n = 1$,

que $65^2 = 33^2 + 56^2$

et que $65^2 = 63^2 + 16^2$.

A partir des nombres choisis pour cet exemple, on a pu en déduire que Diophante savait que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ était somme de deux carrés. Par son choix des valeurs numériques, Diophante, semble familier avec plusieurs propriétés des nombres, comme le fait qu'un nombre de la forme $4n + 3$ n'est pas somme de deux carrés, qu'un nombre de la forme $8n + 7$ n'est pas somme de trois carrés, etc., sans pourtant que ces propriétés soient jamais explicites (V, 9, 11, 14...). Plusieurs d'entre elles seront énoncées, puis démontrées, par Fermat et ses successeurs du XVIII^e siècle et donneront naissance à la théorie moderne des nombres.

Les *Arithmétiques* de Diophante supposent une très grande familiarité avec les propriétés des nombres entiers et rationnels et impliquent la maîtrise de certaines techniques de nature algébrique : transformations d'expressions, substitution, élimination, etc., même si celles-ci restent tacites.

Dans l'ensemble des mathématiques grecques, elles représentent essentiellement quelque chose de nouveau, tant au niveau du contenu qu'à celui des méthodes, en rupture avec les méthodes géométriques traditionnelles. Pourtant, ce seront ces dernières qui symboliseront l'héritage grec, alors que l'influence de Diophante perdurera de façon plus souterraine.

4. Les mathématiques arabes

L'essor des mathématiques arabes commence au VII^e siècle après J.-C., c'est-à-dire aux origines de la religion islamique. Elles vont se développer à partir de multiples problèmes posés par le commerce, l'architecture, l'astronomie, la géographie, l'optique... et vont se caractériser par une synthèse profonde entre les aspirations visant à la résolution de ces problèmes et un travail théorique intense.

Si l'essentiel des mathématiques arabes est traité dans ce chapitre, c'est que dans le domaine de l'élaboration du calcul algébrique tant abstrait que technique, de la constitution de la théorie des équations, des méthodes algorithmiques au carrefour de l'algèbre et de l'arithmétique, les inventions sont incontestables et les progrès particulièrement décisifs.

On peut distinguer deux étapes dans leur développement : d'abord l'assimilation de l'héritage grec et oriental aux VII^e et VIII^e siècles. Bagdad est le premier grand centre scientifique sous les règnes d'Al-Mansur (754-775) et de Harun-ar-Rasid (786-809), les bibliothèques sont nombreuses et les ouvrages scientifiques souvent copiés. La traduction des ouvrages de l'Antiquité grecque s'y poursuivra intensément (Euclide, Archimède, Apollonius, Héron, Ptolémée, Diophante), ainsi que l'étude des ouvrages de l'Inde, de la Perse et de la Mésopotamie.

Mais, dès le IX^e siècle, il y a formation d'une véritable culture mathématique arabe propre, et les nouveaux travaux sortent de l'orbite des mathématiques hellènes.

Le premier savant éminent de l'école de Bagdad est Muhammad Al-Khwarizmi, qui exerça son activité dans la première moitié du IX^e siècle au sein d'un groupe de mathématiciens et d'astronomes qui travaillèrent à la *Maison de la Sagesse*, sorte d'académie établie à Bagdad sous le règne d'Al-Ma'Mun (813-833). Cinq de ses ouvrages en partie remaniés sont conservés, et, en particulier, ses deux traités sur l'arithmétique et l'algèbre ont exercé une influence décisive ultérieurement.

Le traité d'arithmétique n'est connu que dans une version latine du XIII^e siècle, qui n'est sans doute pas une traduction fidèle. Il pourrait s'intituler *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*. C'est en tout cas le premier ouvrage dans lequel sont exposés le système décimal et les opérations effectuées dans ce système, y compris multiplication et division. En particulier, ils utilisent un petit cercle qui a toutes les caractéristiques du zéro. Al-Khwarizmi explique comment prononcer les nombres en utilisant les notions d'unité, de dizaine, de centaine, de millier, de millier de millier... qu'il venait de définir. Mais on ne connaît pas la forme des chiffres utilisés par Al-Khwarizmi, peut-être était-ce les lettres de l'alphabet arabe, ou alors les chiffres arabes d'Orient. En fait le

système de numération purement littéral subsista très longtemps comme en témoignent le *Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands*, écrit par Abu. L-Wafa entre 961 et 976, et le célèbre *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique*, écrit par Al-Karagi entre la fin du X^e et le début du XI^e siècle.

La multiplication et la division par deux sont traitées comme des opérations particulières. On se rappelle qu'elles jouaient un rôle très important dans les mathématiques égyptiennes. Il semble qu'Al-Khwarizmi enseignait la méthode indienne d'extraction de la racine carrée et utilisait le procédé d'approximation que l'on peut représenter par :

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k} \sqrt{N \cdot 10^{2k}}$$

La version latine du livre d'arithmétique d'Al-Khwarizmi nous apprend qu'il donne comme règle d'approximation de la racine carrée d'un nombre $N = a^2 + r$, la quantité, $\sqrt{N} = a + r/2a$. Notons que le mot *algorithme*, qui a désigné le système de l'arithmétique décimale jusqu'à l'aube de l'époque moderne, provient du surnom latinisé d'Al-Khwarizmi.

5. Al-Khwarizmi et la naissance de l'al-jabr

Surtout, Al-Khwarizmi est l'auteur du *Précis sur le calcul de al-jabr et al-muqabala*, qui peut être considéré comme le traité de base d'algèbre en langue arabe, et a fortement influencé, par ses nombreuses traductions latines, toute la science occidentale du Moyen Âge. Une grande partie de l'ouvrage est consacrée à des problèmes pratiques très courants dans la vie quotidienne de l'époque, en particulier ceux de partages d'héritage que le droit de succession musulman rendait très ardu. Le traité d'Al-Khwarizmi enseigne comment résoudre les équations du premier et du second degré à coefficients numériques. Son algèbre est entièrement rhétorique et il n'emploie aucun symbole, même pour les nombres. Pourtant, il distingue trois sortes de nombres : les nombres simples, qu'il désigne par *dirham* (du nom de l'unité monétaire grecque drachme); l'inconnue, qu'il appelle *say'* (chose) ou *gizr* quand il s'agit plutôt de la racine d'une équation; et enfin il utilise *māl* pour le carré de l'inconnue.

Toutes les équations sont ramenées à six types canoniques, qu'Al-Khwarizmi et ses disciples écrivent sous des formes équivalentes à :

$$\begin{array}{ll} 1) ax^2 = bx; & 4) ax^2 + bx = c; \\ 2) ax^2 = c; & 5) ax^2 + c = bx; \\ 3) bx = c; & 6) bx + c = ax^2. \end{array}$$

Tous les coefficients sont positifs, tous les termes doivent apparaître comme des grandeurs additives. Pour les résoudre, deux opérations fondamentales interviennent :

— l'opération *al-jabr* (qui veut dire complément ou remplissage), et qui consiste à se débarrasser des termes à soustraire dans un membre, par l'addition de termes égaux dans les deux membres;

— l'opération *al-muqabala* (qui veut dire la mise en opposition, le

balancement), et qui est la réduction des termes égaux dans les deux membres.

De plus, le coefficient du terme du second degré doit être réduit à l'unité. Par exemple, l'équation :

$$2x^2 + 100 - 20x = 58,$$

donne par *al-jabr* $2x^2 + 100 = 20x + 58$,

puis par *al-muqabala* $2x^2 + 42 = 20x$,

et par division par deux $x^2 + 21 = 10x$.

Le mot d'*al-jabr* désigna bientôt tous les livres ultérieurs des Arabes sur le même sujet. Il devait s'étendre ensuite à toute la théorie des équations et fit son apparition en Europe au XIV^e siècle sous le mot *algèbre* pour désigner cette science.

D'abord, Al-Khwarizmi traite l'équation $ax^2 = bx$ comme l'équation linéaire $ax = b$ en négligeant la solution zéro, ce qui devait subsister jusqu'au XVII^e siècle. Ensuite, il recherche non seulement la racine d'une équation mais également son carré (le *māl*). Les équations du second degré (types 4, 5, 6) sont démontrées à l'aide de certaines transformations géométriques qui rappellent en partie ce qu'on a nommé l'algèbre géométrique des Grecs. C'est le cas pour le type 4, qui correspond à la proposition du Livre II des *Éléments*. Mais cette ressemblance est très partielle.

Tout d'abord, dans les *Éléments* d'Euclide, il n'y a pas d'exemple de résolution d'équation du type 6, alors que Al-Khwarizmi aboutit pour chaque type à des règles générales. En fait, les Grecs cherchaient concrètement une ou deux inconnues bien distinctes et ne voyaient tout au plus dans ce que nous appelons l'équation qu'une relation pouvant exister entre ces grandeurs concrètes.

L'inconnue, dans ce cas, ne peut prendre qu'une seule valeur, sauf si les hypothèses n'ont pas été suffisantes et qu'on hésite sur la spécification de l'inconnue puisque la même relation peut convenir à deux différentes. Au contraire, Al-Khwarizmi étudie déjà l'équation quadratique comme un tout, un objet mathématique en soi. Il manifeste un souci de classification avec procédure résolutive et discussion de chaque cas. Il ne tient jamais compte de la racine négative d'une équation. Les équations de type 4 et 6 ont une seule racine positive (le produit des racines étant négatif) et celles de type 5 ont zéro ou deux racines positives. Les conditions d'existence des racines sont indiquées, le cas d'une racine double mentionné.

On assiste ici à l'acte de naissance d'une théorie des équations quadratiques dans l'ensemble des nombres positifs (presque toujours rationnels), théorie qui comporte encore quelques lacunes.

Notons qu'il utilise très peu les grandeurs irrationnelles qu'il appelle *gidr asamm*, c'est-à-dire racine muette ou aveugle. Gérard de Crémone a traduit au XII^e siècle le mot *asamm* par le latin *surdus* et jusqu'au XVIII^e siècle les nombres irrationnels s'appelaient aussi nombres sourds.

Al-Khwarizmi donne une introduction assez sommaire du calcul algébrique, en expliquant certaines opérations sur les monômes et les binômes, et quelques transformations comme

$$a\sqrt{x} = \sqrt{a^2x} \dots$$

Enfin, on trouve aussi dans son *Algèbre*, une série de problèmes d'héritage qui conduisent à des équations indéterminées et souvent homogènes dont il ne s'attribue pas la découverte mais qui devaient s'inscrire dans une tradition de problèmes que l'on pourrait qualifier d'analyse diophantienne, si ce n'est que *les Arithmétiques* de Diophante n'avaient pas encore été traduites en arabe.

6. Abu Kamil, premier disciple

Al-Khwarizmi doit être considéré comme le véritable fondateur de la théorie des équations quadratiques et son œuvre se prolonge directement dans celle d'Abu Kamil, originaire d'Égypte, qui publie un traité de même titre : *Livre sur l'al-jabr et l'al-muqabala* allant aussi jusqu'aux équations du second degré (fin du IX^e siècle - début du X^e). Ce livre, riche de très nombreux exemples, fit largement progresser cette théorie naissante de l'algèbre, tant d'un point de vue pratique que d'un point de vue abstrait. Il connut une grande popularité et fit l'objet de plusieurs commentaires, non encore retrouvés.

Abu Kamil utilise plus largement et plus sûrement que son prédécesseur des transformations compliquées sur des expressions irrationnelles, de nombreuses opérations du calcul algébrique, dont il rappelle à plusieurs reprises à son lecteur le caractère général d'«identités». Par exemple, il utilise :

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}.$$

La réticence d'Al-Khwarizmi vis-à-vis des quantités irrationnelles du second degré est ici dépassée, et Abu Kamil utilise ces quantités comme des objets de nature purement arithmétique. Abu Kamil utilise plusieurs inconnues auxquelles il attribue alors des dénominations différentes et peut choisir une inconnue auxiliaire pour simplifier la résolution d'un problème (cf. encadré 5). Il complète sur certains points la théorie d'Al-Khwarizmi (cas du type 6).

Le calcul algébrique d'Abu Kamil atteint déjà un degré assez élevé d'abstraction; en particulier, bien qu'il reste attaché à la forme géométrique des Grecs, il renonce à l'exigence classique de l'homogénéité des dimensions, que respectait encore Al-Khwarizmi.

Entre 970 et 1170, une deuxième vague de la science arabe se manifeste et va porter l'algèbre naissante constituée par Al-Khwarizmi et par Abu Kamil à un niveau bien supérieur : celui d'une discipline théorique qui a défini son objet propre et développé des méthodes diversifiées.

Deux courants relativement distincts participent à ce renouvellement. L'un se situe au carrefour de l'arithmétique et de l'algèbre, nourrissant chacune de ces disciplines des progrès réalisés dans l'autre, transposant des algorithmes numériques aux expressions algébriques et des procédures expérimentées sur celles-ci aux nombres, dans un mouvement dialectique

— 5. Problème d'Abu Kamil, faisant intervenir quantités irrationnelles — et changement d'inconnue (début du X^e siècle)

On doit diviser 10 en deux parties x et $10 - x$, de telle sorte que

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}.$$

L'équation correspondante du second degré est :

$$(2 + \sqrt{5})x^2 + 100 = (20 + \sqrt{500})x.$$

Elle se réduit après multiplication par $\sqrt{5} - 2$ à l'équation :

$$x^2 + \sqrt{50000} - 200 = 10x.$$

Abu Kamil trouve une autre solution plus simple, en posant comme *say'* : $\frac{10-x}{x}$.

Si donc on désigne $\frac{10-x}{x}$ par y , on obtient :

$$y^2 + 1 = \sqrt{5} y$$

$$y = \sqrt{1 \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

A partir de l'équation linéaire :

$$\frac{10-x}{x} = \sqrt{1 \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

On détermine l'inconnue x , dont le dénominateur est irrationnel. Pour déterminer x^2 , Abu Kamil élève au carré les deux membres de l'équation :

$$10 - \frac{x}{2} = \sqrt{1 \frac{1}{4}} \cdot x.$$

Il vient :

$$x^2 + 10x = 100 \quad \text{et} \quad x = \sqrt{125} - 5.$$

particulièrement fécond¹. Il s'agit principalement d'Al-Karagi et de ses successeurs : Al-Shahrazuri et, surtout, Al-Samaw'al. *Les Arithmétiques* de Diophante traduites au X^e siècle en arabe vont réagir de manière complexe et encore mal connue avec le développement des mathématiques arabes : influençant l'école d'Al-Karagi et intervenant aussi dans une tradition antérieure arabe d'arithmétique théorique.

Le deuxième courant est associé aux travaux de certains savants qui ont cherché plutôt à faire avancer l'algèbre par la géométrie, en particulier par la

1. Nous remercions ici M. R. Rashed de nous avoir communiqué l'ensemble des articles signalés dans la bibliographie, et sur lesquels nous nous sommes appuyés dans cette partie.

construction géométrique des racines des équations de degré supérieur à deux. Il s'agit surtout d'Ibn Al-Haytham, d'Al-Khayyam, de Sharaf Al-Din Al-Tusi.

7. L'école d'Al-Karagi : les algébristes-arithméticiens

Al-Karagi (fin du X^e siècle - début du XI^e siècle), originaire de la ville de Karaj, située entre Téhéran et Kaswin, est l'auteur de plusieurs ouvrages très importants, notamment le *Livre suffisant sur la science de l'arithmétique*, *Al-Fakhri*, vaste traité d'algèbre dédié au vizir de Bagdad Fahr Al-Mulk, et *Al-Badi*, livre d'analyse indéterminée.

Le *Livre suffisant* est un manuel d'arithmétique pratique présentant beaucoup d'analogies avec un autre livre écrit entre 961 et 976 par Abul-Wafa, le *Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands*. Les nombres sont écrits en toutes lettres et le système décimal de position n'est jamais employé, ce qui devait mieux correspondre aux habitudes des commerçants.

Abul-Wafa avait traité en détail de la théorie des fractions. Al-Karagi aussi s'occupe de la décomposition des fractions ordinaires en sommes de fractions fondamentales. Indiquons ici qu'à la fin du X^e siècle les algorithmes arithmétiques, en particulier d'extractions de racines carrées et même cubiques, s'étaient considérablement développés. Ul Uqlidisi (vers 952-953) avait donné une approximation par défaut de la racine carrée de $N = a^2 + r$, par $\sqrt{N} = a + r/(2a + 1)$.

D'autres mathématiciens comme Kushay ibn Labban (vers 1000 environ) et son élève An Nasawi amélioreront ces résultats et les étendront à la racine cubique en utilisant toujours la décomposition décimale d'un nombre $N = n_0 10^{m-1} + \dots + n_m$ et le développement des binômes $(a + b)^3$ et $(a + b + \dots + k)^3$. Nous y reviendrons.

L'arithmétique de l'inconnue d'Al-Karagi

Ce progrès des algorithmes arithmétiques va conduire Al-Karagi et ses successeurs à chercher des procédures analogues dans le cas d'expressions algébriques.

Outre la partie pratique, la résolution des six formes canoniques d'équations constitue la partie principale d'algèbre du *Livre suffisant*. Mais son exposé présente un progrès du point de vue méthodologique, car Al-Karagi regroupe avant chaque problème les éléments du calcul algébrique qui seront nécessaires (transformation de quantités irrationnelles, identités, etc.).

Ce parti pris relativement théorique est nettement affirmé dans le traité d'algèbre *Al-Fakhri*. Dans sa préface, Al-Karagi définit le but de la science du calcul comme étant la détermination des grandeurs inconnues à l'aide de celles connues. Il s'agit de faire appel à toutes les ressources de calcul de l'arithmétique afin de les appliquer à des expressions algébriques contenant

des inconnues. L'algèbre devient donc explicitement l'*arithmétique de l'inconnue*. On peut dire qu'elle définit pour la première fois son objet, et l'école d'Al-Karagi va diversifier les méthodes et les algorithmes portant sur des expressions contenant l'inconnue.

Il présente d'abord une étude des puissances de l'inconnue et des puissances réciproques pour aboutir à des séries de relations comme :

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \dots,$$

$$\frac{1}{x^m} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^{m+n}},$$

$$\frac{1}{x^m} \cdot x^n = \frac{x^n}{x^m}$$

pour m et n entiers positifs.

Il applique les opérations arithmétiques aux monômes, puis aux quantités composées de monômes, c'est-à-dire des polynômes, en opérant de façon symétrique pour l'addition et la soustraction. En ce qui concerne la division, il se limite à la division par des monômes. Pour la division, comme pour l'extraction de racines carrées, nous examinons les résultats de l'école d'Al-Karagi dans l'œuvre de son successeur Al-Samaw'al, qui l'a reprise, poursuivie.

Mais Al-Karagi aboutit déjà à un premier exposé de ce qu'on pourrait appeler aujourd'hui l'algèbre² des polynômes. Ces méthodes d'*arithmétisation de l'algèbre*, selon l'expression de R. Rashed, sont fondées, d'une part, sur les premiers éléments d'algèbre d'Al-Khwarizmi et d'Abu Kamil, mais, d'autre part aussi, sur la traduction de Diophante effectuée par Qusta ibn Luqa sous le titre d'*Art de l'algèbre*. En effet, bien que les *Arithmétiques* soient un livre d'arithmétique dans l'ensemble des rationnels positifs, Diophante y utilise des techniques de nature algébrique. Ces techniques vont influencer celles des algébristes arabes de la deuxième période, qui s'en emparent et les développent.

Al-Karagi procède à l'addition de plusieurs séries arithmétiques finies comme $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ dont il fournit une jolie démonstration à la fois algébrique et géométrique (cf. encadré 6).

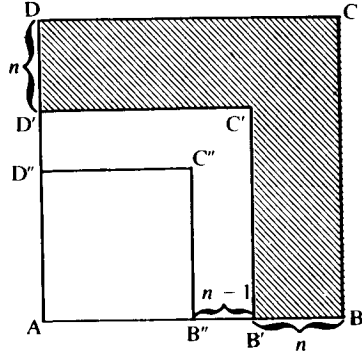
Dans un texte rapporté par Al-Samaw'al, mais que celui-ci attribue à Al-Karagi, on trouve le tableau des coefficients de $(a + b)^n$ jusqu'à $n = 12$, et l'auteur ajoute qu'on pourrait le prolonger indéfiniment suivant la loi de formation que l'on écrit aujourd'hui $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ (ce qu'on appelle le triangle de Pascal).

Dans *Al-Fakhri* et dans *Al-Badi*, Al-Karagi traite aussi des problèmes d'analyse indéterminée qu'il nomme *istiqra*. Ces problèmes consistent souvent à trouver un nombre inconnu x rationnel, de façon qu'une expression algébrique ou un polynôme $P(x)$ soit le carré d'un nombre rationnel donné, comme par exemple :

$$ax^{2n} + bx^{2n+1} = u^2 \quad \text{ou} \quad x^3 \pm y^3 = u^2$$

2. Au sens de structure d'algèbre (cf. glossaire du chapitre 8).

6. Démonstration par Al-Karagi de l'identité : $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$



Soit $1 + 2 + \dots + n$ le côté d'un carré ABCD.

Al-Karagi construit dans ce carré un gnomon $BB'C'D'DC$ (hachuré) dans lequel $BB' = n$.

L'aire du gnomon vaut :

$$2n(1 + 2 + \dots + n) - n^2 = 2n \frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

Puis il construit le gnomon suivant avec $B'B'' = n - 1$.

Sa surface sera $(n - 1)^3$.

En poursuivant de la même façon, il obtient finalement le carré de côté 1.

La surface du carré initial ABCD se décompose en surfaces de tous les gnomons et du carré 1^2 qui est égal à 1^3 .

$$\text{Donc : } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

et de nombreuses variations sur le nombre d'inconnues et d'équations. La récente découverte du Diophante arabe confirme qu'Al-Karagi reprend globalement l'ordre des problèmes des *Arithmétiques*; ceux-ci bénéficient du progrès du calcul algébrique.

Al-Samaw'al. Le symbolisme des tableaux

Le principal successeur d'Al-Karagi est Al-Samaw'al, fils d'un juif érudit émigré du Maroc et installé à Bagdad et d'une lettrée, Anna Isaac Lévi, originaire d'Irak. Promis à la carrière de médecin, il se familiarise très jeune avec les méthodes de calcul des Indiens et lit tous les livres de mathématiques disponibles : Euclide, Abu Kamil, Al-Karagi, dont il voit les insuffisances. Il sera un médecin réputé, soignant plusieurs émirs, et mourra converti à l'islam.

En mathématiques, son ouvrage le plus important, *Al-Bahir* (« Livre lumineux sur l'arithmétique »), est écrit à dix-neuf ans. Il apporte un développement remarquable au travail de ses prédécesseurs, dont il regroupe et synthétise bien des résultats, en particulier ceux d'Al-Karagi. Il est le premier à exposer systématiquement les règles portant sur les quantités négatives comme :

$$\begin{aligned} -(-ax^n) &= ax^n \\ -ax^n - (bx^n) &= -(a+b)x^n \end{aligned}$$

sans que celles-ci soient référées à une quantité positive plus grande, dont elles seraient soustraites. Grâce à la définition de la puissance nulle $x^0 = 1$ pour x non nul, il peut généraliser le concept de puissance algébrique et énoncer les règles des opérations de l'arithmétique les concernant : par exemple $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ pour tous m, n entiers relatifs. Il utilise le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \hline x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} & \frac{1}{x^4} & \dots \end{array}$$

Ainsi, multiplier x^m par x^n (avec n positif) revient à se décaler de n colonnes vers la gauche à partir de x^m . Si n est négatif, on se décalera vers la droite.

Avec ce moyen mémo-visuel, Al-Samaw'al pallie la difficulté des opérations due au cadre entièrement rhétorique de l'algèbre antérieure. Ayant assigné à chaque puissance de x, y compris les puissances négatives, une place dans le tableau, il peut représenter une expression de la forme

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} a_k x^k \text{ par la suite de ses coefficients écrits en chiffres indiens.}$$

Cette technique requise par la complexité croissante des calculs mathématiques constitue un pas décisif dans le développement du symbolisme. En effet, quoique très pesant, le symbolisme des tableaux permettait l'exécution de toutes les opérations algébriques sur les polynômes et on le retrouve plusieurs siècles plus tard chez Stifel, Viète et Wallis. Al-Samaw'al l'utilise pour produire un algorithme de la division des polynômes.

En fait, il ne considère pas exactement des polynômes en une inconnue x , mais à la suite d'Al-Karagi des expressions polynomiales en x et $\frac{1}{x}$; en langage

moderne, elles appartiennent à l'anneau $\mathbb{Q}\left[x, \frac{1}{x}\right]$. Parfois, il considère des

polynômes au sens strict et obtient alors la méthode de division des polynômes avec reste qui est une généralisation de l'algorithme d'Euclide pour la division des entiers. Par exemple, il effectue la division de $20x^2 + 30x$ par $6x^2 + 12$ et poursuit la division aux puissances négatives de x , approchant ainsi les techniques de développement en série. Il obtient :

$$3 \frac{1}{3} + 5(1/x) - 6 \cdot 2/3(1/x^2) - 10(1/x^3) + 13 \frac{1}{3}(1/x^4) + 20(1/x^5) - 26 \frac{2}{3}(1/x^6) - 40(1/x^7).$$

Al-Samaw'al reconnaît la loi de formation des coefficients, $a_{n+2} = -2a_n$, et écrit le coefficient de $(1/x^{28})$ dans le développement, mais ce développement n'est évidemment valable que si x est assez grand, ce que Al-Samaw'al ne précise pas.

Enfin, il réussit à trouver un algorithme d'extraction des racines carrées d'expressions polynomiales (au sens large en x et $1/x$), même quand celles-ci comprennent des coefficients négatifs, point sur lequel Al-Karagi avait échoué.

Ainsi, l'arithmétique et l'algèbre se sont mutuellement enrichies : dans le sens de l'arithmétique vers l'algèbre, les algorithmes de division et d'extraction de racines carrées d'abord expérimentés sur les nombres ont été

appliqués aux expressions de la forme $\sum_{k=-m}^{k=+n} a_k x^k$. Mais en retour dans le sens

de l'algèbre vers l'arithmétique, l'ensemble des résultats obtenus par Al-Karagi et par Al-Samaw'al ont permis l'émergence de la théorie des fractions décimales. En effet, si on remplace x par 10, qu'on utilise la même méthode des tableaux et qu'on adopte l'écriture et la représentation des opérations déjà élaborées dans le cas des expressions algébriques, on aboutit du même coup aux règles de calcul sur les fractions décimales.

C'est en substance ce que contient un manuscrit récemment identifié comme faisant partie d'un *Traité d'arithmétique* rédigé par Al-Samaw'al en 1172, deux ans avant sa mort, et déjà signalé par les bibliographes arabes anciens. En fait, l'exposé a pour origine une méthode d'approximation numérique d'une équation de la forme $x^n - Q = 0$.

Al-Samaw'al veut connaître le nombre réel inconnu qui est la racine $n^{\text{ième}}$ irrationnelle de Q par une suite de nombres rationnels connus qui se rapprochent de la racine $n^{\text{ième}}$. Citons ici Al-Samaw'al : «... c'est pourquoi il devient possible de trouver continûment une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle et de trouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, et indéfiniment». Il témoigne d'une grande familiarité avec l'ensemble des nombres réels. C'est cette suite de nombres rationnels qui lui donne l'occasion d'exposer les fractions décimales, mais sans qu'aucune dénomination soit donnée à cet objet. Nous ne citerons pas ici le détail de la méthode de résolution numérique; elle s'apparente au procédé que nous développons à propos de Sharaf Al-Din Al-Tusi.

Bien des résultats et des méthodes que l'on peut faire remonter à l'école d'Al-Karagi, de la fin du x^e , du xI^e et du xII^e siècle, ont été attribués à Al-Kashi au xv^e siècle, dont l'influence est directement perceptible en Occident, notamment chez Regiomontanus.

8. Les géomètres-algébriques et la résolution des équations cubiques

Dans les ouvrages de la première algèbre (Al-Khwarizmi, Abu Kamil) ou de l'école d'Al-Karagi, l'étude des équations ne dépasse pas le cadre des équations du second degré ou tout au plus des équations quadratiques en une inconnue comme celles de la forme $ax^{2n+m} + bx^{n+m} = cx^m$, dans l'*Al-Fakhrî*. Une première impulsion dans l'étude des équations cubiques est liée au problème d'Archimède exposé dans son traité *Sur la sphère et le cylindre* (proposition 4 du Livre II); problème qui consiste à déterminer l'intersection d'une sphère par un plan, de telle manière que le rapport des volumes des deux calottes sphériques obtenues soit égal à un rapport donné. Une solution géométrique de ce problème par l'intersection de deux sections coniques est due à Eutocius d'Ascalon (vers 500 après J.-C.), qui s'est appuyé sur un manuscrit attribué à Archimède.

Al-Mahani est le premier à s'intéresser à nouveau au problème et surtout à lui donner une forme algébrique, à savoir « l'égalité d'un cube et d'un nombre à un carré », c'est-à-dire une équation de type $x^3 + r = px^2$. Mais il ne réussit pas à construire la racine de l'équation. Plusieurs mathématiciens du x^e siècle, dont Abu Jà Fal Al-Khazin, Ibn Al-Haytham et bien d'autres, reprennent d'ailleurs plusieurs problèmes hérités des Alexandrins : duplication du cube, trisection de l'angle, construction de polygones réguliers, en particulier à sept et neuf côtés, inscrits dans un cercle. Or tous ces problèmes de construction géométrique conduisent à des équations du 3^e degré et ne sont donc pas constructibles à la règle et au compas, comme Wantzel devait le démontrer en 1843 (cf. annexe chapitre 3).

Ils sont donc l'objet de défis et de controverses entre les géomètres arabes, qui ont alors recours à d'autres courbes que les droites et les cercles, les coniques d'Apollonius.

Ibn Al-Haytham, connu sous le nom d'Alhazen en Europe occidentale, originaire de Basra, en Irak, vécut au Caire (965-1093). Il fut mathématicien, astronome, physicien et médecin. Ses travaux d'optique, sur la physiologie de la vue, sur la réflexion et la réfraction ont exercé une influence considérable en Occident, notamment sur Kepler, Descartes, Huygens. Il résolut le problème d'Archimède à l'aide d'une parabole et d'une hyperbole, et cela au moment même où Al-Khazin lui trouvait aussi une solution proche. On sait que ce problème peut se ramener à une équation cubique $x^3 + a^2b = cx$ et la solution (d'Eutocius et d'Ibn Al-Haytham) fait intervenir l'intersection de la parabole $x^2 = ay$ et de l'hyperbole $y(c-x) = ab$. Mais les expressions algébriques étaient encore absentes de ces solutions.

Dans le *Traité d'optique*, le problème de la détermination du point de réflexion sur un miroir cylindrique d'un rayon lumineux issu d'un point et devant aboutir à l'œil conduit Ibn Al-Haytham à une équation du 4^e degré qu'il résout par l'intersection d'une circonférence et d'une hyperbole. Il a également rédigé deux traités complets sur la construction de l'heptagone régulier.

Au cours du x^e siècle, la tendance à traduire algébriquement les problèmes du 3^e degré connus antérieurement se renforce grâce aux progrès

manifestes de la théorie des équations du second degré qui offrait le modèle des solutions par radicaux, et grâce aussi aux besoins de l'astronomie qui a posé directement de multiples problèmes du 3^e degré.

Al-Biruni (973-1048) cherche à déterminer les coordonnées de certains angles afin de construire les tables de sinus. Il énonce explicitement deux équations cubiques :

$$x^3 - 3x - 1 = 0 \quad \text{où } x \text{ est la corde d'un angle de } 20^\circ;$$

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad \text{où } x \text{ est la corde d'un angle de } 80^\circ.$$

Le nombre et l'importance des problèmes qui se ramenaient à des équations du 3^e degré firent apparaître la nécessité d'une théorie plus systématique et générale sur le sujet, que le développement du calcul algébrique par Al-Karagi rendait possible. Cette théorie sera l'œuvre d'Al-Khayyam.

Al-Khayyam

Al-Khayyam (ou Omar Khayyam) naquit en 1048 à Nishapur, dans le Khorassan, où il aurait reçu son éducation. Il est contraint dans la situation politique trouble de l'époque de mener une vie errante et de changer souvent de lieu de résidence.

Vers 1070, il est à Samarkand, obtient l'appui d'Abu Tahir et écrit, sous son patronage, son grand traité *Démonstrations de problèmes d'al-jabr et de al-muqabala (Risala...)* sur les équations cubiques. Puis il vécut dix-huit ans à Ispahan, où il dirige l'Observatoire, sous la protection du sultan Malik Shah, rassemblant sous son autorité les meilleurs astronomes, dressant des tables astronomiques précises et préparant la réforme du calendrier. Mais la mort du sultan lui valut poursuites et errances.

Il écrivit diverses œuvres philosophiques et surtout ses célèbres *Ruba i' yat*, qui sont près de mille quatrains poétiques en langue persane, qui lui ont valu aux XIX^e et XX^e siècles une renommée universelle.

Outre son *Risala*, sa contribution scientifique la plus importante est un commentaire sur la théorie euclidienne des parallèles et des rapports sur lequel nous reviendrons. Un traité d'arithmétique sur l'extraction des racines n'a pas été découvert, mais il est signalé par ses successeurs.

Dans son *Risala*, Al-Khayyam explique l'essence de l'algèbre comme étant la théorie des équations dont les membres sont des polynômes entiers. Elle est, ici nettement dissociée de l'arithmétique. Les grandeurs inconnues sont aussi bien des entiers que des grandeurs continues (ligne, surface, volume, et même temps) et leur résolution nécessite aussi bien solutions numériques que solutions sous formes géométriques. Pour la résolution « par radicaux » des équations cubiques, Al-Khayyam reconnaît avoir échoué sur ce point mais formule le souhait : « *Peut être qu'un de ceux qui viendront après nous la réalisera.* » Pour les solutions géométriques, Al-Khayyam indique que, dans le cas des équations cubiques, il faudra s'appuyer sur les deux premiers livres des *Coniques* d'Apollonius, car les *Éléments* d'Euclide n'y suffiront pas.

Le traité d'Al-Khayyam contient une classification des équations et des

constructions géométriques des racines au moyen desquelles le nombre et l'existence des racines positives sont déterminés. Les équations sont étudiées sous une forme générale, c'est-à-dire avec des coefficients positifs quelconques, mais exprimées de façon entièrement rhétorique.

Comme les Anciens, il s'en tient strictement au principe de l'homogénéité des dimensions. Par exemple, pour résoudre géométriquement l'équation $x^3 + ax = b$, il commence par la mettre sous la forme $x^3 + p^2x = p^2q$. Celle-ci est résolue à l'aide du cercle $x^2 + y^2 = qx$ et de la parabole $x^2 = py$ (cf. encadré 7). L'abscisse du point d'intersection des courbes, qui ne se trouve pas à l'origine des coordonnées, est une racine de l'équation. De même, la méthode poursuivie pour résoudre un autre exemple, $x^3 = ax + b$, revient à considérer l'intersection de la parabole $x^2 = \sqrt{ay}$ et de l'hyperbole équilatère $x\left(\frac{b}{a} + x\right) = y^2$, etc. Pour chaque classe d'équation cubique, et

Al-Khayyam distingue quatorze types canoniques, il explique le choix du couple de coniques correspondant. Celui-ci n'est pas fortuit : comme l'a montré Woepke, premier éditeur de *l'Algèbre d'Al-Khayyam* au XIX^e siècle, celui-ci privilégie les cercles, les hyperboles équilatères pour lesquelles asymptotes ou axes de symétrie sont parallèles aux axes de coordonnées et les paraboles, dont l'axe de symétrie est aussi l'un des axes de coordonnées.

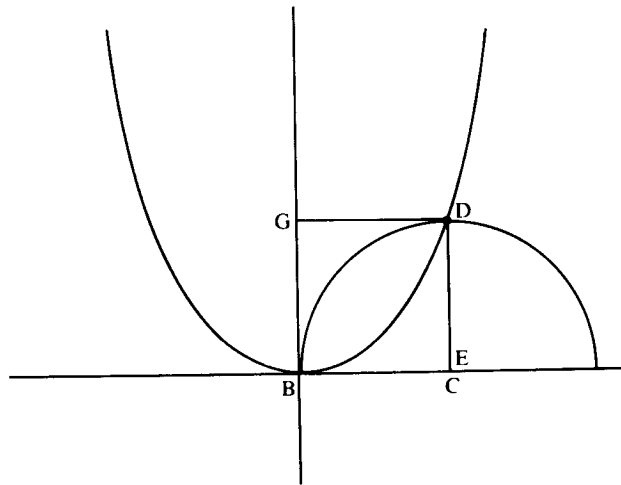
Al-Khayyam, enfin, discute les conditions de possibilité des racines positives suivant les valeurs de certains paramètres, conditions qui entraînent l'intersection ou non des coniques. Ainsi, dans le cas de l'équation $x^3 + a = cx^2$, la construction de la racine se fait à l'aide de la parabole $y^2 = \sqrt{a}(c - x)$ et de l'hyperbole $xy = \sqrt{a}^2$. Al-Khayyam montre qu'il n'existe aucune solution pour $\sqrt[3]{a} \geq c$, étudie ensuite les cas $\sqrt[3]{a}$ supérieur,

inférieur ou égal à $\frac{c}{2}$ et donne les limites entre lesquelles les racines peuvent exister. Il remarque explicitement qu'une équation du 3^e degré peut avoir deux racines positives, mais, malgré une analyse très minutieuse, manque la possibilité des trois racines positives, en particulier dans le cas de l'équation

$$x^3 + bx = cx^2 + a.$$

Certaines préoccupations liées à la théorie géométrique des équations cubiques d'Al-Khayyam, pratiquement absentes de son œuvre, vont se manifester plus clairement chez l'un de ses successeurs, Sharaf Al-Din Al-Tusi : il s'agit de l'étude des propriétés des courbes pour justifier de leur intersection, continuité, convexité, comportements asymptotiques.

La construction géométrique des racines des équations va susciter un grand intérêt au XVII^e siècle chez presque tous les mathématiciens. Descartes, surtout, a trouvé une construction unique pour résoudre les équations du 3^e et du 4^e degré à l'aide d'une parabole et d'un cercle. D'ailleurs, l'utilisation des constructions géométriques en algèbre le conduit à une classification des courbes algébriques et est très liée au développement de la géométrie analytique.



Al Khayyām résout $x^3 + ax$ par l'intersection du cercle $x^2 + y^2 = qx$ et de la parabole $x^2 = py$.

9. Résolution numérique et méthodes d'approximation de Sharaf Al-Din Al-Tusi à Al-Kashi

Fin du XII^e siècle, début du XIII^e siècle, de multiples travaux dans les domaines de l'algèbre et de l'arithmétique se développent. On n'en connaît pas tous les auteurs et bien des ouvrages n'ont pas été retrouvés. Assez récemment, on a commencé à analyser un manuscrit de la collection de l'India Office à Londres. Il s'agit du résumé par un auteur anonyme du *Traité des Équations* de Sharaf Al-Din Al-Tusi, cité par de nombreux savants arabes, dont Al-Kashi au XV^e siècle.

Sharaf Al-Din Al-Tusi

Sharaf Al-Din Al-Tusi, qui vécut en Iran à la fin du XII^e siècle (il serait mort vers 1213-1214), est un continuateur d'Al-Khayyām, dont il reprend les solutions géométriques des équations cubiques. Mais il y ajoute une

discussion assez systématique de l'existence des racines positives de ces équations. Et ce souci le conduit à progresser sur la voie de l'étude des courbes, au moyen des équations, et même à utiliser dans ses calculs des déterminations de type infinitésimal.

La discussion, en effet, se fonde presque toujours sur la recherche de maximums, et pour cela Sharaf Al-Din utilise des expressions correspondant à la dérivée première des polynômes. Bien que cette notion ne soit jamais désignée, et que le manuscrit existant n'ait pas encore permis de déterminer l'origine de ces profonds résultats, leur présence doit être notée.

Il repère le rôle du discriminant dans les équations cubiques : par exemple, il remarque dans l'équation $x^3 + a = bx$ que l'existence des racines positives n'est acquise que si $\frac{b^3}{27} - \frac{a^2}{4}$ est positif ou nul. Mais ce discriminant n'apparaît pas dans une formule résolutive, et c'est peut-être l'impossibilité de donner une solution algébrique directe de ces équations qui amène Sharaf Al-Din Al-Tusi à poser le problème de leur résolution numérique approchée.

Pour cela, il bénéficie de l'ensemble des acquis mathématiques des deux derniers siècles et des instruments théoriques et techniques forgés tant par les algébristes-arithméticiens que par les géomètres-algèbristes : algorithmes pour extraire les racines numériques, « algèbre » des polynômes d'Al-Karagi, symbolisme des tableaux, connaissance de la formule du binôme, extension de la théorie des équations aux équations non quadratiques, et même ébauche primitive de l'étude des courbes au moyen de l'algèbre.

L'ensemble de ces instruments est à l'œuvre dans la méthode de résolution numérique de Sharaf Al-Din Al-Tusi. Celle-ci se présente comme un développement des procédés d'extraction de la racine d'un nombre ou, si l'on veut, le calcul de la racine positive de l'équation $x^n = N$, connue sans doute depuis Al-Khayyām et employée, plus tard, par Al-Kashi. Si x_0 est le plus grand entier inférieur à $\sqrt[n]{N}$, on écrit $N = x^n$ sous la forme $N = (x_0 + x_1)^n$ et l'approximation consiste à écrire $x_0^n + nx_0^{n-1}x_1 \approx N$, c'est-à-dire qu'on néglige les puissances de (x_1/x_0) supérieures à deux dans le développement du binôme. C'est d'ailleurs la méthode qu'utiliseront Stifel et Viète.

Dans le *Traité des Équations*, Sharaf Al-Din l'étend aux équations quadratiques et cubiques non binômiales.

Voici le détail du procédé de Sharaf Al-Din Al-Tusi sur un exemple d'équation cubique :

$$x^3 + 3ax = N,$$

soit

$$x^3 + 36x = 91\,750\,087.$$

La méthode consiste à retrouver progressivement chaque ordre de puissance de N (les millions, les centaines de milliers..., les dizaines, les unités) à partir du regroupement des termes provenant de l'élévation au cube d'une quantité reconnue comme étant un nombre de centaines (x_1), un nombre de dizaines (x_2), un nombre d'unités (x_3) et de la multiplication par 36 de cette quantité.

Nous formaliserions aujourd'hui la situation ainsi :

notons la racine $x = x_1 + x_2 + x_3$,
avec $x_1 = a \cdot 10^2$,
 $x_2 = b \cdot 10$,
 $x_3 = c$,

(a, b, c sont des chiffres de 0 à 9),

$$x^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_2^2x_1 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3$$

$$36x = 36x_1 + 36x_2 + 36x_3.$$

Nous allons ordonner ces expressions suivant les puissances décroissantes de 10 :

$$x^3 = a^3 \cdot 10^6 + 3a^2b \cdot 10^5 + 3ab^2 \cdot 10^4 + 3a^2c \cdot 10^4 + 6abc \cdot 10^3 + b^3 \cdot 10^3 + 3ac^2 \cdot 10^2 + 3b^2c \cdot 10^2 + 3bc^2 \cdot 10 + c^3$$

$$36x = 36a \cdot 10^2 + 36b \cdot 10 + 36c.$$

La première étape (tableau I) consiste à chercher a , c'est-à-dire la plus grande centaine dont le cube est inférieur à 91 millions, soit $a^3 < 91$.

Tableau I :

N	9	1	7	5	0	0	8	7
$x_1^3 + 36x_1$	6	4		1	4	4		
N_1	2	7	7	3	5	6	8	7
					1	2		

Le calculateur trouve $a = 4$.

Puis il somme tous les termes que l'on peut déterminer à partir de la valeur de a , écrit ce qui lui reste :

$$N_1 = N - a^3 10^6 - 36a 10^2$$

$$N_1 = 91\,750\,087 - 64\,000\,000 - 14\,400$$

$$N_1 = 27\,735\,687.$$

La deuxième étape (tableau II) consiste à chercher b . Le calculateur cherche, dans ce qui lui reste, quel terme contenant b peut atteindre des centaines de milliers : il cherche donc le plus grand entier b tel que : $3a^2b < 277$, soit $3 \cdot 16 \cdot b < 277$. Il trouve $b = 5$.

Tableau II :

N_1	2	7	7	3	5	6	8	7
x_2^3			1	2	5			
$3x_1 + 3x_2^2 + 3x_2x_1^2 + 36x_2$	2	7	0	0	1	8	0	
			6	0	8	8	8	7
		1	6			1	2	
			2	0				

Puis il réitère l'opération, consistant à déterminer le reste, quand on ôte à N_1 tous les termes contenant a et b connus.

$$N_2 = N_1 - 3a^2b \cdot 10^5 - 3ab^2 10^4 - b^3 \cdot 10^3 - 36b \cdot 10 = 608\,887.$$

La troisième étape (tableau III) consiste de même à chercher c , donc le plus grand entier tel que : $3a^2c < 60$, c'est-à-dire $3 \cdot 16 \cdot c < 60$.

Il trouve $c = 1$.

Il détermine alors le dernier reste, qui, ici, est nul.

La racine vaut 451.

Tableau III :

6	0	8	8	8	7
					1
6	0	8	8	8	6

Ce manuscrit comme d'ailleurs un autre ouvrage le *Recueil d'arithmétique à l'aide du tableau et de la poussière* de Nasir Al-Din Al-Tusi (vers 1265) confirment que l'œuvre d'Al-Kashi est bien l'aboutissement d'une longue activité antérieure en arithmétique et en algèbre.

L'œuvre d'Al-Kashi

Al-Kashi (mort en 1429 à Samarkand) fut un des derniers grands savants arabes, astronome et mathématicien. Après une longue période de pénurie et de pauvreté, il vint à Samarkand, où le souverain Ulugh Bek, lui-même homme de science, avait fondé une école pour étudiants avancés, construit un observatoire qu'Al-Kashi dirigea pendant de longues années et fait de cette ville le centre scientifique le plus important de l'Est. En astronomie, Al-Kashi

travailla avec Qasi-Sada à l'établissement de tables astronomiques d'une extraordinaire précision — les *Zig Ulugh Bek* — qui comportent les sinus et les tangentes pour des arcs variant de minute en minute.

Son ouvrage le plus célèbre, la *Clef de l'arithmétique* (*Miftah al hisab*, 1427), véritable encyclopédie mathématique, entendait répondre à tous les besoins : ceux des calculateurs, des astronomes, des architectes comme ceux des fonctionnaires ou des marchands. Ce sera l'ouvrage de référence pour les siècles suivants, très souvent repris et recopié. La *Clef de l'arithmétique* regroupe la plupart des méthodes arithmétiques et algébriques élaborées antérieurement et dont nous avons parlé. En particulier, Al-Kashi expose non seulement l'arithmétique sexagésimale mais pour la première fois aussi méthodiquement la théorie des fractions décimales en vue d'établir que les opérations peuvent s'effectuer de la même façon que pour les entiers. Il porte une grande attention aux conversions entre les deux systèmes. La méthode d'extraction de racines carrées (dite de Ruffini-Horner au XIX^e siècle) est reprise. Nous l'avons déjà citée à propos de Sharaf Al-Din Al-Tusi.

Dans le *Traité de la circonférence*, il donne une détermination de 2π avec 16 décimales exactes et son calcul par approximation est fondé comme celui d'Archimède sur le calcul du périmètre de polygones réguliers inscrits dans le cercle et circonscrits. Mais Al-Kashi se distingue par une méthode très élégante et la simplicité de ses estimations numériques, et dépasse de très loin toutes les tentatives antérieures.

Cette maîtrise des procédés d'approximation est aussi manifeste dans la résolution numérique de l'équation de trisection de l'angle. Elle devait figurer dans le *Traité de la corde et du sinus*, non retrouvé, mais elle est rapportée par le petit-fils de Qadi Zada, Miram Salabi (mort vers 1524). Cette équation s'obtient à partir de la relation $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ et peut s'écrire donc $x^3 + q = px$. Al-Kashi part de $\sin 3^\circ$, qui peut être déterminé par des opérations élémentaires, et cherche $\sin 1^\circ$. En substance, sa méthode

consiste, quand on veut résoudre une équation de la forme $x = \frac{q + x^3}{p}$ et qu'on sait que la racine positive est très petite, à prendre pour première approximation $x_1 = \frac{q}{p}$, pour deuxième approximation $x_2 = \frac{q + x_1^3}{p}$, ... pour $n^{\text{ième}}$ approximation $x_n = \frac{q + (x_{n-1})^3}{p}$.

On peut démontrer que ce procédé converge rapidement, et la méthode s'avère bien plus intéressante et économique en calculs que d'autres méthodes générales de résolution approchée. Au XIX^e siècle, Hankel a pu écrire qu'« elle ne le cédait ni en finesse ni en élégance à toutes les méthodes d'approximation découvertes en Occident depuis Viète ». Il affirme en outre que c'est la première méthode d'approximation numérique successive rencontrée en histoire des mathématiques.

Les mathématiques arabes d'Orient ont atteint leur apogée dans les ouvrages de l'école de Samarkand. Mais, après le meurtre d'Ulugh Bek en 1449, celle-ci tomba en décadence et la recherche mathématique périclita.

En Occident, les savants arabes ont été sans doute moins prestigieux,

hormis le cas du célèbre mathématicien marocain ibn Al-Banna (1256-1321), mais c'est en Espagne que se développèrent le plus intensément les contacts scientifiques et culturels entre pays islamiques et pays chrétiens d'Europe. Au XII^e siècle, l'activité des traducteurs et compilateurs des ouvrages arabes ou traduits du grec en arabe était florissante. Et, bien après cette époque, c'est en Espagne, et en Sicile aussi, que les savants européens continuèrent à étudier la science arabe. Parmi les mathématiciens arabes d'Occident, Al-Qalasadi vécut à Grenade, et mourut en 1486 exilé en Afrique. Son livre, *Dévoilement de la science de l'arithmétique*, est très riche et, surtout, il se distingue de la *Clef de l'arithmétique* d'Al-Kashi et de tous les autres traités antérieurs d'Orient par la présence de symboles algébriques assez élaborés : la racine carrée est désignée par la première lettre du mot *gidr* (racine), placée au-dessus du nombre. Dans les équations, la première puissance, le carré et la troisième puissance des inconnues sont désignés par les premières lettres des mots *say*, *mal* et *k'ab* et ces signes apparaissent dans tous les cas au-dessus des coefficients. Un signe désigne l'égalité. La maturation du processus qui a conduit à ces éléments de symbolique algébrique semble avoir eu lieu principalement en Afrique du Nord à partir du XIII^e siècle. Notons qu'en Europe le développement du symbolisme commence à peu près au même moment, à la fin du XV^e siècle.

10. La notion de nombre

La conception que se font les mathématiciens, à une époque donnée, de la notion de nombre est toujours significative du niveau théorique de leurs mathématiques et elle détermine les limites de leur pratique arithmético-algébrique.

Les mathématiques babyloniennes évoluaient dans le cadre de l'anneau des nombres exprimables de façon finie en base 60, les mathématiques égyptiennes se bornaient aux entiers et aux fractions unitaires. Les Grecs possédaient la théorie subtile des rapports du Livre V des *Éléments*, subtile mais non directement opératoire³. L'algèbre naissante (Diophante, Al-Khwarizmi) était dans l'ensemble des rationnels positifs. Faisons le point sur la notion de nombre au terme de ces siècles de constitution de l'algèbre par les Arabes.

La naissance d'une nouvelle conception du nombre embrassant à la fois tous les nombres réels positifs peut-être déjà repérée au début du X^e siècle dans l'emploi d'un même mot *adad* (nombre) pour les nombres rationnels (*al-adad al muntiqā*) et les nombres irrationnels (*al-'adad al-summa*). Progressivement, à partir d'Abu Kamil et jusqu'à Al-Samaw'al, les nombres irrationnels sont devenus un objet à part entière de l'algèbre et de l'arithmétique; grandeurs géométriques incommensurables et quantités numériques irrationnelles ont tendu à se confondre.

Le projet d'Al-Karagi et d'Al-Samaw'al d'étendre les opérations d'arithmétique, y compris les extractions de racines aux quantités algébriques irrationnelles, conduit à un élargissement du champ du calcul — qui concerne

3. On pourra se reporter aussi au début du chapitre 5.

maintenant à la fois nombres et segments, objets arithmétiques et objets géométriques — et à une meilleure connaissance de la structure algébrique des réels. Si l'on accepte un instant le langage moderne, on peut dire qu'Al-Karagi et Al-Samaw'al ont une connaissance empirique très riche des extensions algébriques finies du corps des rationnels, en particulier celles de degré 2 et 4.

Ce point de vue a entraîné une réinterprétation du Livre X des *Éléments*, non plus seulement considéré par les arithméticiens-algébribistes comme un livre de géométrie mais comme un livre traitant des grandeurs en général, c'est-à-dire des nombres. En effet, pour eux, les transformations portant sur des quantités irrationnelles correspondent à des opérations arithmétiques et ils les ont expliquées sur des exemples numériques.

Enfin, d'Al-Samaw'al à Al-Kashi, l'utilisation des suites de nombres décimaux pour approcher un nombre irrationnel les familiarise avec la structure *continue* des réels. Pourtant, ces algébribistes-arithméticiens ne se sont pas posés des questions très précises sur le statut de ces grandeurs incommensurables, et les raisons du succès des extensions effectuées.

Ces questions, liées à la théorie des proportions du Livre V des *Éléments*, seront plutôt soulevées par les géomètres comme Al-Khayyam dans les *Commentaires des difficultés se trouvant dans les introductions du livre d'Euclide*. Al-Khayyam y expose une théorie élaborée des proportions. S'il tient pour juste la définition de la proportion du Livre V d'Euclide, Al-Khayyam considère qu'elle n'exprime pas l'essence d'un rapport qui est de mesurer une grandeur par une autre.

En ce qui concerne les rapports incommensurables, qui est le point difficile de la théorie, il adopte une démarche qui se ramène à décomposer un rapport $\frac{A}{B}$ en une fraction continue.

Rappelons ce qu'est une fraction continue.

Soit x un nombre positif, rationnel ou irrationnel. On peut poser :

$$x = q + \frac{1}{x_1}, x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}, \dots, x_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{x_n}, \dots$$

q, q_1, q_2, \dots étant les plus grands entiers qui soient contenus dans x, x_1, x_2, \dots respectivement. Seul le premier entier q peut être nul, les autres sont au moins égaux à 1.

Par substitution, on peut écrire :

$$x = q + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

$$+ \frac{1}{q_{n-1} + \dots}$$

qui est appelé une fraction continue.

Si x est un rationnel $\frac{A}{B}$, il existe une valeur de n pour laquelle $\frac{1}{x_n} = 0$. En

effet, la procédure revient à l'algorithme d'Euclide de division de A par B , qui est fini dans ce cas. Il s'écrit :

$$A = Bq + r; B = rq_1 + r_1; \dots; r_{n-1} = q_n r_n + r_{n+1}, \text{ mais } r_{n+1} = 0;$$

ou bien :

$$\frac{A}{B} = q + \frac{1}{r}; \frac{B}{r} = q_1 + \frac{1}{r_1}; \dots; \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n.$$

Si x est un irrationnel, la suite est infinie, et on peut démontrer que x est limite des fractions obtenues, en ne conservant qu'un nombre fini de termes : $q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ sont appelés quotients partiels de la fraction continue.

Al-Khayyam indique qu'il y aura égalité de deux rapports s'il y a égalité de leurs quotients partiels pour tout n . Il donne aussi un critère permettant de comparer deux rapports, puis il s'efforce d'établir l'équivalence de sa théorie avec celle du Livre V d'Euclide.

Al-Khayyam soulève ici le problème profond du lien existant entre les notions de rapport et de nombre, qui est pour lui de nature philosophique : « Un rapport peut-il être par essence un nombre, ou est-il seulement accompagné d'un nombre, ou encore le rapport est-il lié à un nombre non par nature mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport est-il lié par nature à un nombre et n'a-t-il besoin, de ce fait, de rien d'extérieur? » Quelle que soit la réponse, Al-Khayyam considère que les rapports quelconques doivent pouvoir s'exprimer par des nombres, même si certains sont impropres; nous dirions aujourd'hui qu'ils sont des nombres irrationnels.

Sa conception sera prise et développée par Nasir Al-Din Al-Tusi dans l'*Exposé d'Euclide* et le *Traité du quadrilatère complet*, pour qui tout rapport a sa mesure.

Cette conquête théorique, l'extension de la notion de nombre aux nombres positifs irrationnels, fut connue en Europe à la fin du XVI^e siècle grâce à l'édition à Rome de l'*Exposé d'Euclide*, d'abord en arabe, en 1594, puis dans une traduction latine en 1657.

Dans l'Occident médiéval chrétien, dans lequel la pratique arithmético-algébrique s'est beaucoup moins développée que chez les Arabes, la conception du nombre est restée étroite. Bradwardine affirmait qu'une proportion irrationnelle ne peut pas être représentée par un nombre et Oresme pensait que si la géométrie concerne les grandeurs incommensurables, l'arithmétique, elle, s'occupe des commensurables.

Au XVI^e siècle, Stifel (1487-1567) refuse encore aux irrationnels le statut de « vrais » nombres, alors que Simon Stevin (1548-1620), qui a une réelle pratique de calcul sur les nombres décimaux — c'est lui qui introduit en Europe les fractions décimales dans un petit traité édité en flamand en 1585 —, réagit vivement pour faire reconnaître les nombres irrationnels comme des nombres à part entière. Il s'élève contre l'usage de cette terminologie d'« irrationnel », d'« inexprimable ».

Le débat perdurera au cours du XVII^e siècle, autour de la lecture et de

l'interprétation du Livre V d'Euclide. Surtout, l'essor de tous les calculs à partir de cette époque, calcul algébrique symbolique et calcul infinitésimal, fait éclater le cadre dans lequel il se pose. Il ne sera élucidé théoriquement qu'au cours du XIX^e siècle par les différentes constructions des réels (Dedekind, Weierstrass, Cantor, Méray).

Quant aux fractions continues, elles seront très en vogue au XVIII^e siècle pour étudier des problèmes de théorie des nombres, liés à la nature rationnelle, irrationnelle, algébrique, transcendante des nombres.

Par exemple, Euler montrera qu'une fraction continue périodique est un nombre quadratique réel (c'est-à-dire racine d'une équation du second degré dont le discriminant n'est pas un carré parfait), et Lagrange prouvera la réciproque.

11. « La Coss » allemande

Pendant la Renaissance, le savoir algébrique va considérablement s'enrichir en Occident, et tout particulièrement en Italie et en Allemagne, où on verra s'éclorre de véritables écoles d'algébristes. La découverte en 1464 des *Arithmétiques* de Diophante par Regiomontanus, grand collectionneur et traducteur de manuscrits grecs, a certainement ranimé l'intérêt pour ce qu'il désigne par cet « *ars rei et census* » (*art de la chose cherchée ou inconnue*).

En effet, les termes utilisés par les Arabes pour l'inconnue signifient chose et racine. Avec le nom du carré de l'inconnue, qui signifie possession, ils ont donné naissance aux termes en usage dans le Moyen Âge chrétien : *res*, *radix*, *causa* pour l'inconnue (*cosa*, en italien; *coss*, en allemand), *census* pour le carré de l'inconnue.

L'école allemande, qui prend justement le nom de *La Coss*, va s'efforcer d'élaborer une notation commode et introduit des abréviations de *rex*, de *radix*, de *census*, etc., dans les formules; ce qu'on appelle les caractères cossiques. En effet, la nécessité d'une notation qui permettrait d'abrégé les calculs s'était fait sentir avec le développement du commerce et la mise en place d'une économie marchande. Sous la pression des besoins pratiques, et après l'invention de l'imprimerie, de nombreux manuels d'arithmétique ont vu le jour.

8. Notations cossiques

Christoph Rudolff introduit en 1525 la notation $\sqrt{\quad}$ pour la racine carrée, $\sqrt[3]{\quad}$ pour la racine cubique et $\sqrt[4]{\quad}$ pour la racine quatrième.

M. Stifel adopte \sqrt{z} pour désigner \sqrt{z} , puis plus tard il écrit $\sqrt{\quad}$

$\sqrt{\&}$ pour désigner $\sqrt{\quad}$

\sqrt{zz} pour désigner $\sqrt{z^2}$

Il écrit AA pour x^2

AAA pour x^3 .

12. Les algébristes italiens de la Renaissance

L'Italie de la fin du XV^e siècle est active dans la production de travaux d'arithmétique pratique. Luca Pacioli (1450-1510), frère franciscain qui occupa une chaire de mathématiques à Milan, publie le premier livre imprimé contenant véritablement de l'algèbre : *Summa de arithmetica, geometria, proporzioni di proporzionalita* (1494). Il y reprend la classification des Arabes pour les types d'équation du second degré. Il semble d'ailleurs que l'ensemble des acquis algébriques de ces derniers soit ici connu et assimilé et serve de point de départ aux travaux des Italiens.

En 1500, un citoyen de Bologne, professeur de mathématiques très fameux, Scipione del Ferro (1456-1526), donne la formule de résolution :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

pour l'équation $x^3 + ax = b$. Malgré tous les progrès réalisés par les Arabes sur les équations cubiques, cette formule constituait une nouveauté. Mais, comme c'était l'habitude à l'époque, del Ferro tint sa méthode secrète. Elle devait néanmoins provoquer de grands progrès dans la théorie des équations et susciter des rivalités très vives et de dures querelles de priorité entre ses successeurs : Tartaglia d'une part, Cardan et son école de l'autre.

Vers 1535, Nicollo Fontana de Brescia (1499?-1557), dit Tartaglia, répondant à un défi, résout une trentaine d'équations cubiques particulières de type

$$x^3 + mx^2 = n \quad \text{et} \quad x^3 + ax = b.$$

Il semble que Cardan ait eu connaissance de sa méthode sous le serment de ne pas la dévoiler. Il sera pourtant le premier à rendre publique la méthode de résolution des cubiques en 1545, provoquant la rage de Tartaglia pour de longues années.

En fait, Cardan, médecin réputé et esprit universel — il a écrit dans sa vie près de deux cents articles sur les sujets les plus divers —, avait déjà publié un premier ouvrage en 1539, *Practica arithmeticae*, dans lequel il faisait preuve d'une grande habileté à résoudre des équations à coefficients numériques mais sans aucun formalisme ni règle générale.

Au moment où il publie son plus grand ouvrage, *Artis magna sive de regulis algebraicis*, dit *Ars magna*, Cardan est certainement l'algébriste le plus expérimenté de toute l'Europe. Pourtant, son livre est très fastidieux au lecteur moderne, car, comme les algébristes arabes, Cardan traite de façon distincte un grand nombre de types d'équations du 3^e degré, puisqu'il n'admet comme coefficients que les nombres positifs, et cela non seulement dans l'équation cubique à résoudre mais aussi dans l'équation du second degré à laquelle il aboutit. En effet, voyons quelle est sa méthode sur l'exemple $x^3 + mx = n$ (avec m et n positifs). Il introduit t et u tels que $t - u = n$ et $tu = \left(\frac{m}{3}\right)^3$. Puis il établit, par des considérations géométriques, que $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$, ce qui revient à vérifier que :

Cardan écrit l'égalité :

$$(5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

sous la forme :

$$5 p : Rm : 15,$$

$$5 m : Rm : 15,$$

$$25 m : m : 15q \text{ est } 40.$$

Il note $\sqrt{7 + \sqrt{14}}$ sous la forme R.V.7p : R14.

Le signe V indique que tout ce qui suit est sous le signe radical.

$$(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u})^3 = t - u - 3(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u})\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{u}.$$

Il obtient une équation du second degré ayant pour racines :

$$t = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2},$$

$$u = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2},$$

et, en prenant les racines cubiques positives, Cardan obtient x .

Il y a une difficulté dans la solution de Cardan qu'il a remarquée mais non résolue : quand la quantité $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ est négative — ce qui correspond au cas où l'équation a trois racines réelles —, la formule ne peut pas s'appliquer si l'on veut rester dans le corps des réels. Pour la conserver, il faut accepter de sortir de \mathbb{R} , et alors on retrouve une valeur réelle pour x , qui s'écrit comme somme de deux racines cubiques de nombres complexes. C'est le cas que Tartaglia qualifiait d'irréductible.

Cardan se révèle un subtil calculateur : il s'enhardit à manipuler avec force précautions des expressions contenant des racines carrées de nombres négatifs. Et il lui arrive aussi d'admettre en fin de résolution des solutions négatives, qu'il appelle nombres fictifs ou « racines moins pures ». De plus, il sait éliminer systématiquement le terme en x^{n-1} dans une équation de degré n par une translation $y = x + h$ appropriée. Il observe que les équations du 3^e degré peuvent avoir trois racines, et celles du 4^e degré, quatre. Il reconnaît la possibilité de multiplicité des racines. Dans l'*Ars magna*, on trouve également une méthode de résolution de l'équation du 4^e degré à l'aide d'une équation auxiliaire du 3^e degré, que Cardan attribue à Ludovico Ferrari (1522-1565), son disciple. Ici aussi est traitée une vingtaine de types différents d'équations.

Rafaël Bombelli

Le dernier grand algébriste italien de cette période est Rafaël Bombelli (1526-1572). Après qu'en 1546 la controverse entre Cardan et Tartaglia devint publique avec la parution des *Questiti et inventione diverse* de Tartaglia, et alors que des copies des *Cartelli di matematica disfida* (1547-1548) échangées entre Tartaglia et Ferrari circulent dans toutes les villes d'Italie, Bombelli, admirateur de Cardan, conçut le projet d'écrire un traité d'algèbre. Celui-ci, exposition systématique et logique des connaissances algébriques de l'époque, est rédigé entre 1557 et 1560.

Pourtant, quelques années plus tard, Bombelli a l'occasion de lire à Rome le manuscrit des *Arithmétiques* de Diophante, que Regiomontanus avait trouvé à Venise près d'un siècle auparavant. Il en est sûrement très impressionné car il reprend en partie son ouvrage. C'est ainsi qu'il intègre, sans même les distinguer des siens, quelque cent quarante exercices tirés des *Arithmétiques*, dont quatre-vingt-un ont les mêmes valeurs numériques. Dans la préface, Bombelli indique qu'il s'est écarté des habitudes des auteurs de son époque, préoccupés surtout de problèmes concrets et qu'il veut, lui, enseigner l'arithmétique supérieure et relever la « dignité » de cette discipline. La comparaison avec la version primitive de l'ouvrage, retrouvée à Bologne en 1923, confirme bien l'abandon de nombreux exercices pratiques, liés à la vie quotidienne, au profit de problèmes formulés abstraitement à la manière de Diophante. Les trois premiers livres de l'*Algebra* de Bombelli furent publiés en 1572, quelques mois avant sa mort.

Bombelli était donc le premier à diffuser les problèmes de Diophante en Occident, bien que ceux-ci, dispersés dans l'*Algebra* et beaucoup plus symbolisés, seront identifiés plus tard. Surtout, il favorisait l'émergence d'une formulation plus abstraite et théorique de l'algèbre.

En ce qui concerne les équations de degré supérieur à deux, Bombelli, comme ses contemporains, traite un grand nombre de cas, ne considérant que les coefficients positifs, mais son habileté et sa maîtrise à utiliser formellement les racines de nombres négatifs le rendent capable d'établir que la formule de Scipione del Ferro est valable dans tous les cas. On peut dire que la solution du cas irréductible de l'équation cubique lui revient. Les équations du 4^e degré sont aussi traitées par les méthodes de Ferrari. Il appelle les racines carrées d'une quantité négative, *piu di meno* et *meno di meno*. Ainsi, il note *p. d. m. 10* pour $+\sqrt{-10}$ et *m. d. m. 10* pour $-\sqrt{-10}$.

Bombelli considère les racines des équations comme des sommes algébriques de nombres positifs affectés d'un des quatre signes suivants : *piu*, *meno*, *piu di meno*, *meno di meno*, qui correspondent à peu près à nos +, -, +i, -i. Il donne les règles de multiplication de ces quatre éléments. Par exemple, *piu di meno via meno di meno fa piu*, peut se traduire en $(+i)(-i) = +1$. Il pose d'autre part que *piu* et *piu di meno* ne s'additionnent pas, ayant ainsi une première intuition de l'indépendance linéaire de 1 et *i*.

Notons aussi, comme contribution importante de Bombelli, les progrès que constituent ses notations. La notation des puissances est analogue à celle de Chuquet, bien qu'il ignore la puissance 0 et les puissances négatives déjà employées par Stifel. Quant aux puissances fractionnaires, elles seront introduites par Simon Stevin en 1585 (cf. encadré 10).

\downarrow pour notre x .

$\underline{\downarrow}$ pour x^2 .

$5\downarrow$ ou $\frac{1}{5}$ pour $5x$.

R_x [] : pour appliquer le radical à l'agrégation de deux termes ou plus.

R_x [$4p R_x 6$] pour $\sqrt{4 + \sqrt{6}}$.

R_x^3 [$2p R_x$ [$om 12$]] pour $\sqrt[3]{2 + \sqrt{0 - 121}}$.

Quelquefois : R_q pour R_x et $R \cdot c$ pour R_x^3 .

Exemple :

$$1 \cdot p \cdot 3\downarrow \cdot p 6^2 \cdot 1^3 \text{ veut dire } 1 + 3x + 6x^2 + x^3.$$

Pour la même expression que Bombelli, Stevin écrirait :

$$1^{(1)} + 3^{(1)} + 6^{(2)} + 1^{(3)}.$$

Stevin utilise aussi $\textcircled{2}$ pour $\sqrt{\quad}$, et $\textcircled{3}$ pour $\sqrt[3]{\quad}$.

L'influence de Bombelli, attestée par la mention qu'en fait Stevin dans son *Arithmétique* ou la correspondance Leibniz-Huygens, sera durable.

La résolution des équations cubiques et biquadratiques a mis en évidence simultanément la nécessité de deux nouvelles extensions de la notion de nombre : celle de nombre négatif et celle de nombre imaginaire, dont nous suivrons l'évolution au chapitre 7.

13. Le symbolisme algébrique

L'histoire des notations mathématiques est touffue : elle est faite d'une foule de tentatives, de trouvailles, de règles qu'adopte personnellement tel ou tel mathématicien et qui disparaissent avec lui. La plupart n'ont influencé le développement des mathématiques que par la démonstration de leur insuffisance. Un certain nombre ont fini par s'imposer et sont employées aujourd'hui. Ici, nous voulons surtout éclairer quelle transformation conceptuelle a accompagné l'apparition d'un véritable langage algébrique symbolique, dont les grands traits sont acquis après Viète et Descartes.

On a vu que dans l'Antiquité on faisait un usage systématique des lettres en géométrie pour désigner des indéterminées comme des points ou des droites, etc., c'est-à-dire des grandeurs qui ne sont pas inconnues mais seulement données de façon non spécifiée. En fait, la pratique des lettres dans la géométrie grecque paraît bien primitive. On se sert des lettres en tant que noms d'objets, mais, ensuite, on ne fait plus rien de ces symboles.

Du côté de l'arithmétique et de la théorie des équations, quelques traces d'abréviations symboliques sont très anciennes : signes pour l'addition et la

sostraction chez les Égyptiens et plus systématiquement chez Diophante. Pourtant, le caractère rhétorique de l'algèbre prédominera largement, en particulier chez les Arabes, en dépit du haut niveau de technicité de leur calcul algébrique. Seul, le symbolisme des tableaux rencontré dès le XI^e siècle chez Al-Samaw'al, puis chez Sharaf Al-Din Al-Tusi, constitue l'invention remarquable qui a permis l'essor des procédés algorithmiques sur les polynômes, indispensables dans l'algèbre entièrement rhétorique.

On peut distinguer deux processus : d'une part, inventer des notations maniables pour les quatre opérations de l'arithmétique, avec des conventions d'écriture permettant d'agrèger certains termes, en séparer d'autres, afin d'éviter toute ambiguïté sur l'ordre d'effectuation des opérations, en bref pouvoir structurer une suite d'opérations ; d'autre part, inventer des symboles pour l'inconnue et ses puissances et former des sommes algébriques avec ces symboles. Les deux processus se sont développés parallèlement.

En algèbre, l'usage des lettres est apparu dès le début du XVI^e siècle. Ainsi Maurolico, dit Francesco de Messina, en fait usage, mais sans calculer avec elles, et s'il fait des additions et des multiplications, il introduit une nouvelle lettre à chaque fois, pour chaque somme et produit, imitant ainsi l'antique méthode de la géométrie. Une importante innovation est l'utilisation de lettres capitales A, B, C, ... pour désigner les inconnues dans les équations à plusieurs inconnues. Elle se trouve à quelques variantes près chez l'Allemand Stifel en 1544, le Français Jacques Peletier en 1554, et très clairement chez Jean Borrel, un homme d'Église connu sous le nom latinisé de Buteo, qui publie en 1559 *Logistica quae et arithmetica Vulgo dicitur*.

Ainsi, vers cette époque, la manipulation de certaines expressions algébriques à une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres, et à coefficients numériques, devient plus familière. C'est ce qu'on a appelé l'*algèbre numéreuse*. Mais la mutation la plus fondamentale viendra d'un homme, plus connu à son époque comme maître de requêtes et conseiller privé d'Henri IV, François Viète (1540-1603). Viète, qui eut une brillante carrière politique, consacra relativement peu de temps à son œuvre scientifique, dont le principal est l'*Art analytique*. Celui-ci est conçu comme un vaste ensemble de dix parties, destiné à introduire, puis à mettre en pratique, la méthode de représentation littérale de l'auteur, en algèbre et en géométrie.

Le grand mérite de Viète est d'avoir réuni la méthode traditionnelle en géométrie et la méthode nouvelle en algèbre : il désigne par des lettres non seulement les inconnues et les puissances des inconnues, ce qui était déjà une habitude algébrique, mais aussi des coefficients indéterminés, ce qu'on avait fait en géométrie depuis l'Antiquité. Avec ces lettres, il forme des mots, c'est-à-dire des expressions algébriques avec lesquelles il opère comme on l'avait fait depuis un siècle dans les équations.

Il réserve pour les grandeurs connues indéterminées les consonnes B, C, D, ... et pour les inconnues les voyelles A, E, O, ... Viète réalise des progrès très nets en matière de calcul algébrique et d'applications de celui-ci à la géométrie des Grecs. Les problèmes classiques du second et du troisième degré sont traités, ainsi que nombre de problèmes de degré supérieur.

Mais, surtout, en un pas — l'introduction systématique de la

représentation littérale —, l'algèbre devient l'étude de types généraux d'expressions et d'équations, puisque ce qui est fait pour le cas général recouvre une infinité de cas particuliers. Et cela permet de s'intéresser à la structure des problèmes plutôt qu'à leur forme particulière.

Dans l'*Isagoge*, conçue comme une introduction méthodologique à l'*Art analytique*, Viète lui-même oppose sa « *logistica speciosa* » à la « *logistica numerosa* » antérieure. La première seule est l'algèbre, méthode pour opérer sur des espèces, des classes de choses; la deuxième est l'arithmétique, qui opère seulement sur les nombres.

La dernière proposition du traité de Viète fonde véritablement la théorie des équations en donnant les relations entre *coefficients* (le terme est de lui) et racines. Elle inspirera Harriot et Albert de Girard. Les mathématiciens de la première moitié du XVII^e siècle simplifieront les notations de Viète. Avec Descartes, elles auront à peu près atteint leur forme actuelle. En particulier, les inconnues ne sont plus les voyelles mais les dernières lettres de l'alphabet.

14. L'émancipation de l'algèbre par rapport à la géométrie

Notons que Viète n'utilise les coefficients littéraux que pour les nombres positifs et conserve une conception géométrique pure des grandeurs. Ainsi, dans une équation, les lettres représentent des grandeurs géométriques dont la nature est toujours indiquée, afin que soit respectée la loi d'homogénéité. Pourtant, bien que géométriquement on ne puisse pas dépasser trois dimensions, Viète n'hésite pas à utiliser des grandeurs d'un plus grand nombre de dimensions, ce qui avait beaucoup heurté certains mathématiciens comme Stifel, qui qualifiait cette utilisation de « *contre nature* ». Le problème majeur du XVI^e siècle et du début du XVII^e siècle est de justifier le raisonnement algébrique. La réponse au début est encore de rechercher la signification géométrique équivalente de l'algèbre.

Comme ses prédécesseurs italiens, Viète reste très attaché à la géométrie. Il considère l'algèbre comme une voie royale vers celle-ci. Elle est pour lui un moyen de découverte, le temps de « *l'analyse* » au sens que lui donnait Platon (par opposition à la synthèse), et c'est pourquoi il l'a appelé l'*Art analytique*. Mais sa vision est assez large pour permettre un développement autonome et une vie propre de l'algèbre qui outrepassa progressivement les limitations imposées par la pensée géométrique.

La dépendance de l'algèbre vis-à-vis de la géométrie va se trouver renversée quand Descartes va utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes de constructions géométriques, en particulier par sa géométrie des coordonnées. Pour Descartes, l'algèbre n'est pas une science au sens où elle ne donne pas de connaissances sur le monde physique : celles-ci viennent de la géométrie et de la mécanique. Mais il voit en l'algèbre une méthode puissante pour supporter le raisonnement sur des quantités abstraites et inconnues. De son point de vue, l'algèbre, en rendant automatique, « *mécanique* », les mathématiques, permet une simplification de la pensée, une économie d'efforts. Ainsi, pour Descartes, l'algèbre précède les autres

branches des mathématiques, elle est une extension de la logique, dénuée de signification par elle-même, mais indispensable pour le maniement des quantités, et, en un sens, plus fondamentale même que la géométrie. En tant que technique, affranchie de ses liens à la géométrie, l'algèbre est pour Descartes une part de sa recherche générale de la *Méthode*.

Plusieurs mathématiciens, dont Leibniz, réfléchirent beaucoup sur cette possibilité de « *mécaniser* » le raisonnement mathématique, sur l'économie de pensée qu'un bon symbolisme permet. Isaac Barrow, maître et ami de Newton, aura une vision un peu analogue de l'algèbre, considérée davantage comme une formalisation de la logique que comme une branche des mathématiques. Mais, quelle que soit la philosophie de l'algèbre de tel ou tel savant, l'effet pratique du développement du symbolisme algébrique et de la théorie des équations est de hausser l'algèbre au rang d'une branche autonome, qui a acquis en 1700 ses lettres de noblesse.

15. Fermat et le réveil de la théorie des nombres

Parallèlement à cette constitution autonome de l'algèbre, une autre discipline, l'arithmétique, va trouver au XVII^e siècle une vigueur et une actualité quelque peu perdues depuis Diophante et les algébristes arabes du Moyen Âge. Ce sera surtout l'œuvre de Pierre de Fermat (1601-1665).

Né dans une famille de commerçants, Pierre de Fermat deviendra homme de loi et conseiller au Parlement de Toulouse. Bien que les mathématiques soient toujours restées pour lui un hobby, il s'est trouvé à l'origine de ses branches les plus fécondes : géométrie analytique, calcul infinitésimal, calcul des probabilités. Pourtant, il n'a rédigé aucun ouvrage complet et la plupart de ses essais sont restés manuscrits de son vivant. Ils étaient connus par des lettres à ses amis et correspondants. Ainsi, il n'a rédigé précisément aucune démonstration, se contentant de donner quelques indications.

En arithmétique, le point de départ de Fermat est Diophante. Déjà, les mathématiciens du XVI^e siècle avaient retrouvé les livres de Diophante, Xylander les avait traduits en latin, Stevin en français, Bombelli et Viète s'en étaient inspirés.

En 1621, Bachet de Meziriac avait publié le texte grec de Diophante et une nouvelle traduction latine avec un important commentaire, corrigeant certaines erreurs glissées dans les *Arithmétiques*, généralisant quelques solutions. Lui-même avait étudié dans *Problèmes plaisants et délectables* la résolution des équations indéterminées du premier degré de la forme $ax + by = c$ et montré que, si a et b sont premiers entre eux, l'équation $ax + by = 1$ a toujours un couple-solution (x, y) . C'est ce résultat qui est connu aujourd'hui sous le nom d'identité de Bezout, parce que Bezout l'a établi dans l'anneau des polynômes à coefficients réels.

Fermat possède l'édition de Diophante par Bachet, qu'il va annoter dans la marge d'indications devenues célèbres, et s'enthousiasme pour l'analyse diophantienne. A ce moment, Fermat est déjà familiarisé avec les écrits de Viète, et met à profit sa notation symbolique.

Alors que Diophante travaillait sur l'ensemble des rationnels positifs, Fermat est le premier à se restreindre au domaine des nombres entiers, qui constitue pour lui le propre même de l'arithmétique. Il se demandait si le fait que les problèmes de nombres entiers aient été autant négligés jusque-là n'était pas dû à la référence trop prégnante à la géométrie. Son refus d'accepter des solutions rationnelles à certains problèmes, en rupture avec la tradition de l'analyse diophantienne ancienne, va amorcer une dispute avec Wallis, Frénicle et quelques autres.

En arithmétique, les sujets d'intérêt principaux de Fermat sont les nombres premiers, la divisibilité. Parmi l'ensemble de ses résultats sur les nombres, dont beaucoup n'ont été démontrés que par les mathématiciens du XVIII^e siècle, surtout Euler, signalons :

— le petit théorème de Fermat : « Pour tout nombre premier p , et tout nombre a non divisible par p , on a $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ » ;

— l'équation dite de Pell-Fermat $x^2 = Ay^2 + 1$ a pour tout entier positif A non carré parfait, une infinité de solutions dans \mathbb{Z} ;

— les nombres de Fermat qui sont de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$ et qu'il croyait tous premiers. Euler démontrera que $F_5 = 2^{32} + 1$ ne l'est pas ;

— surtout, la célèbre hypothèse du dernier théorème de Fermat : « Pour n entier plus grand que 2, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible dans \mathbb{Z} et dans Q . » Ce théorème a suscité de multiples recherches très profondes depuis plus de trois siècles et a fait d'énormes progrès, mais n'est pas encore démontré aujourd'hui pour tout n .

En théorie des nombres, les idées et les découvertes de Fermat n'ont pas beaucoup influencé les mathématiciens de son temps. Elles ont été surtout très stimulantes pour les générations suivantes.

Euler témoigne d'un goût particulier pour ces recherches. Il démontre le petit théorème de Fermat et le généralise au cas où le module n'est pas un nombre premier. Il démontre aussi que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est somme de deux carrés, fait une théorie des diviseurs des expressions $a^n + b^n$ et établit dans les cas $n = 3$ et 4 l'hypothèse du théorème de Fermat.

Lagrange apporte aussi une contribution importante : il donne une première démonstration rigoureuse du fait que l'équation de Pell-Fermat $x^2 - Ay^2 = 1$ est toujours résoluble. Il prouve aussi que tout nombre premier est la somme de quatre carrés au plus et utilise pour cela les formes du premier et du second degré, diviseurs de $t^2 + au^2$ où t et u sont deux indéterminées, et a un nombre donné. Le siècle se clôt avec le livre de Legendre sur la *Théorie des nombres* (1798), qui contient une foule de résultats intéressants, mais il appartiendra aux mathématiciens plus jeunes d'en tirer des conceptions générales.

En fait, il faudra attendre l'œuvre magistrale de Gauss, les *Disquisitiones arithmeticae*, publiée en 1801, à l'âge de vingt-quatre ans, pour que la théorie des nombres cesse d'être un amas de résultats isolés, produits d'intuitions et de découvertes très souvent géniales, pour se transformer en une nouvelle discipline douée de méthodes propres, puissantes et très profondes (cf. chapitre 8).

16. La résolution algébrique des équations : piétinements et avancées

Si l'algèbre a été le centre d'intérêt majeur du XVII^e siècle, les vastes horizons ouverts par la création du calcul infinitésimal la font négliger quelque peu au cours du siècle suivant. Précisons d'ailleurs que si algèbre et géométrie se sont maintenant dissociées, la distinction entre analyse et algèbre est très peu claire au cours du XVIII^e siècle. Cela est dû au fait que le concept de limite n'a pas été défini. A l'époque d'Euler et de Lagrange, l'étude des fonctions, des séries, des algorithmes infinis, etc. relève de l'« analyse algébrique » (cf. chapitre 6) alors que la théorie des équations prend souvent le nom d'analyse algébrique finie.

A côté des démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dont nous avons choisi de parler à propos des nombres imaginaires (cf. chapitre 7), les mathématiciens cherchent toujours des méthodes de résolution des équations de degré quelconque. Faute de les trouver, des méthodes de résolution numérique sont étudiées par Descartes, Newton, Lagrange, etc. : règles pour séparer les racines, trouver le nombre de racines réelles (Descartes, puis Stirling et De Gua au XVIII^e siècle), règles pour déterminer les signes des racines, méthodes d'approximation de Newton, de Lagrange ; théorie de l'élimination d'une inconnue entre deux équations, etc.

Mais la résolution algébrique des équations de degré supérieur (expression algébrique composée avec les coefficients d'une équation donnée, et qui, substituée à l'inconnue, satisfasse identiquement à cette équation) reste un point noir crucial de la théorie des équations. Les premières tentatives sérieuses viennent de la part d'un ami de Leibniz, Tschirnhaus (1651-1708), qui s'efforce en 1689 de ramener toute équation algébrique, par un certain changement de variable, à une équation binôme $x^n - C = 0$ que Cotes et De Moivre avaient résolue par division des arcs. Tschirnhaus part de l'équation $P(x) = 0$ de degré n , et pose $y = Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$ à coefficients indéterminés. Il élimine x entre les deux équations $P(x) = 0$ et $Q(x) - y = 0$ et cherche à déterminer les coefficients du polynôme Q de façon à faire disparaître de l'équation résultante en y , certains ou tous les termes intermédiaires. La méthode réussit très bien pour $n = 3$, mais pour $n = 5$, la recherche des coefficients de Q conduit à une équation du 24^e degré qui ne peut s'abaisser. Évidemment, si la méthode réussissait toujours, toute équation serait algébriquement résoluble. Euler et Bezout étudieront le même problème par des procédés assez voisins, mais en ne progressant guère.

En 1770, deux Mémoires très importants de Van der Monde et de Lagrange paraissent. Ils mettront fin à la période de recherche plus ou moins empirique des méthodes de résolution.

Le Mémoire de Van der Monde

Van der Monde s'intéresse surtout à la résolubilité par radicaux des équations $x^p - 1 = 0$, dites cyclotomiques ou de division du cercle. Leurs

racines — qui sont les p racines $p^{\text{èmes}}$ complexes de l'unité — s'écrivent

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p} \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$
 Mais une telle solution trigonométrique n'est pas forcément algébrique.

Van der Monde commence par montrer qu'il suffit de considérer le cas p premier, car si $p = p'm$ où p' est premier, l'équation $x^p - 1 = 0$ devient $y^{p'} - 1 = 0$ (avec $y = x^m$), et la résolubilité des deux équations est équivalente. Il affirme que toute équation de la forme $x^p - 1 = 0$ est résoluble par radicaux.

Le Mémoire de Van der Monde est assez difficile à suivre. Mais voici l'idée de sa méthode, telle que Gauss l'a brillamment appliquée dans ses *Recherches arithmétiques* au cas de $x^{17} - 1 = 0$ (cf. encadré 11). Le résultat qui se trouve à la base du raisonnement est le suivant : si les fonctions symétriques (c'est-à-dire invariantes par toute permutation) de n variables, sont dans un corps donné K , alors ces n variables sont racines d'une équation à coefficients dans ce corps⁴.

Si $r = e^{\frac{2\pi}{p}} = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$, les racines de $x^p - 1 = 0$ s'écrivent $1, r, r^2, \dots, r^{p-1}$. Leur somme $1 + r + \dots + r^{p-1}$ est nulle. L'idée de Van der Monde est de trouver des sous-sommes disjointes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_e$ (avec $e < p$) de la somme des racines, de façon que les fonctions symétriques des σ_i soient toutes rationnelles. D'après le résultat que l'on vient d'énoncer, les σ_i seront racines d'une équation de degré $e < p$, à coefficients rationnels. On considère ensuite comme connues ces quantités σ_i — on dit qu'on les a « adjointes » au corps des coefficients rationnels — et on essaie de trouver des sous-sommes disjointes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{e'}$, de certaines des σ_i , dont les fonctions symétriques peuvent s'exprimer comme fonctions rationnelles de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_e$. Dans ce cas, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{e'}$ seront racines d'une équation de degré $e' < p$, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de $\sigma_1, \dots, \sigma_e$. On répétera le processus en considérant maintenant connues les quantités $\tau_1, \dots, \tau_{e'}$. L'idée est d'aboutir éventuellement à des sous-sommes ω_i réduites à un seul terme, c'est-à-dire qui soient racines de l'équation initiale, et telles que les ω_i soient racines d'une équation de degré inférieur à p et dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des sous-sommes précédentes.

Van der Monde ne mène sa méthode à bien que pour l'équation $x^{11} - 1 = 0$, dont il exprime les solutions au moyen de racines carrées et de racines cinquièmes, et sans doute trouve-t-il les sous-sommes successives par tâtonnements. Gauss, lui, s'appuiera sur les propriétés arithmétiques de l'exposant p , et l'existence des racines primitives de congruences (cf. les *Disquisitiones arithmeticae*, chapitre 8). Mais Van der Monde se révèle un des premiers utilisateurs de la notion de substitution dans l'ensemble des racines d'une équation algébrique, et cette intuition des « adjonctions » successives aura un grand avenir.

4. Nous suivons l'analyse qu'en fait Wlet F. Ellison dans l'*Abrégé d'histoire des mathématiques*, sous la direction de J. Dieudonné.

11. Gauss : méthode de résolution de l'équation $x^{17} - 1 = 0$

Soit $r = e^{\frac{2\pi}{17}}$. Les racines s'écrivent :

$$1, r, r^2, \dots, r^{16},$$

on a $1 + r + r^2 + \dots + r^{16} = 0$.

Il utilise l'existence de racines primitives modulo p , pour effectuer la division en sous-sommes successives. C'est cette existence qui va fonder un certain ordre dans lequel ranger les racines 17^e de l'unité.

Soit g une racine primitive* modulo 17, par exemple $g = 3$.

On écrit : $n_1 = r^{g^0} + r^{g^2} + \dots + r^{g^{14}}$

$$n_2 = r^{g^1} + r^{g^3} + \dots + r^{g^{15}}.$$

On vérifie : $n_1 + n_2 = -1$

$$n_1 n_2 = -4$$

n_1 et n_2 sont racines de $x^2 + x - 4 = 0$.

$$n_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \quad n_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

On applique le même type de raisonnement à n_1 et n_2 .

On écrit :

$$\mu_1 = r^{3^0} + r^{3^4} + r^{3^8} + r^{3^{12}} \quad \mu_2 = r^{3^2} + r^{3^6} + r^{3^{10}} + r^{3^{14}}$$

$$\mu_3 = r^{3^1} + r^{3^5} + r^{3^9} + r^{3^{13}} \quad \mu_4 = r^{3^3} + r^{3^7} + r^{3^{11}} + r^{3^{15}}$$

On obtient les relations :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = n_1 & \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ sont racines de } x^2 - n_1x - 1 = 0, \\ \mu_1 - \mu_2 = -1 \\ \mu_3 + \mu_4 = n_2 & \mu_3 \text{ et } \mu_4 \text{ sont racines de } x^2 - n_2x - 1 = 0. \\ \mu_1 - \mu_2 = -1 \end{cases}$$

On divise μ_1 en sous-sommes :

$$\beta_1 = r^{3^0} + r^{3^8},$$

$$\beta_2 = r^{3^4} + r^{3^{12}}.$$

On trouve $\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = \mu_1 \\ \beta_1 - \beta_2 = 3 \end{cases}$

β_1 et β_2 sont racines de $x^2 - \mu_1x + \mu_3 = 0$.

Puis $r^{3^0} + r^{3^8} = \beta_1$

$$r^{3^0} \cdot r^{3^8} = 1$$

r^{3^0} et r^{3^8} sont racines de l'équation $x^2 - \beta_1x + 1 = 0$; or $r^{3^0} = r$.

On a résolu l'équation $x^{17} - 1 = 0$ au moyen de quatre équations quadratiques successives.

* 3 est racine primitive modulo 17 car les 16 premières puissances de 3 ne sont pas congrues deux à deux modulo 17; c'est-à-dire qu'elles ont toutes des restes distincts modulo 17 (cf. chapitre 8, page 271).

Le bilan de Lagrange

Le mémoire de Lagrange est similaire sur un certain nombre de points à celui de Van der Monde, mais il est beaucoup plus important, plus systématique et parfaitement clair dans l'exposé.

« Je me propose, y déclare Lagrange, d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir a priori pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré et sont en défaut pour les degrés ultérieurs. »

L'analyse de Lagrange porte donc davantage sur les méthodes que sur les équations; il examine historiquement les tentatives de ses prédécesseurs Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Descartes, Tschirnhaus, Euler, De Moivre, et établit le bilan systématique de leurs entreprises, puis compare les méthodes entre elles afin d'en déduire leurs portées et leurs limites.

Au terme de cet examen, Lagrange montre qu'elles reviennent toutes au fond, à faire dépendre la résolution de l'équation proposée de celle d'une autre équation auxiliaire, dont les racines y_k sont composées linéairement des racines x_h de l'équation donnée et des puissances d'une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces expressions $y_k = \sum_{h=1}^{h=n} \omega_k^h x_h$, $1 \leq k \leq n$, où ω_k prend successivement comme valeurs celles des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, sont appelées les *résolvantes de Lagrange*. On aura progressé dans la résolution de l'équation initiale si l'équation auxiliaire obtenue est de degré inférieur à celui de la proposée.

Lagrange montre clairement que la résolubilité de l'équation cubique est liée à l'existence d'une fonction de trois variables, ne prenant que deux valeurs distinctes par permutation de ces variables, au lieu des six valeurs que l'on pouvait théoriquement prévoir (il y a six permutations possibles de trois objets). Dans ce cas, il s'agit de l'expression $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$, où ω est la racine cubique de l'unité. L'équation auxiliaire est alors du second degré et a pour racines $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ et $x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$. De même, la résolubilité par radicaux de l'équation de degré quatre est liée à l'existence d'une fonction de quatre variables et ne prenant que trois valeurs distinctes par permutation de ces variables; dans ce cas, c'est l'expression $x_1 x_2 + x_3 x_4$.

Ensuite, dans un deuxième moment de son Mémoire, Lagrange montre que les racines de l'équation initiale s'expriment comme fonctions rationnelles des racines de l'équation auxiliaire et des coefficients de l'équation initiale. Cela lui permet de ne pas se satisfaire de l'analyse *a posteriori* des méthodes existantes mais de reconstruire par un procédé direct, et *a priori*, les équations auxiliaires réduites en utilisant les propriétés des résolvantes et des racines primitives de l'unité. Il montre qu'au-delà du 4^e degré, l'équation auxiliaire est d'un degré supérieur à celui de l'équation initiale donnée, et ne paraît pas susceptible d'abaissement.

Les résultats auxquels aboutit Lagrange ne sont donc pas définitifs. Du moins éviteront-ils de nouvelles tentatives inutiles. Il conclut : « Si la résolution algébrique des équations des degrés supérieurs au quatrième n'est

pas impossible, elle doit dépendre de quelques fonctions des racines, différentes de la précédente. » Et Lagrange a prouvé, à ce propos, les premières propositions que l'on peut rattacher à la théorie des groupes comme 1) le nombre de valeurs distinctes que peut prendre une fonction de n variables, par permutation de ces variables, est un diviseur de $n!$ — avec le même raisonnement que l'on suit aujourd'hui pour montrer que l'ordre d'un sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe 2) un théorème très profond sur les fonctions semblables de racines, qui anticipe l'idée galoisienne de « suite de composition » (cf. encadré 12).

12. Exemple de fonctions semblables

Les fonctions $x_1 x_2 + x_3$ et $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3$ sont semblables car elles sont toutes deux invariantes par la seule permutation qui échange x_1 et x_2 et laisse fixe x_3 .

La proposition de Lagrange affirme que si l'on a deux fonctions semblables des racines d'une équation, alors chacune d'elles est fonction rationnelle de l'autre et des coefficients de l'équation. Galois la redémontrera dans son fameux Mémoire de 1829.

Le Mémoire de 1770-1771 de Lagrange, extraordinaire par sa construction et sa démarche, représente un bilan méthodologique de toutes les recherches algébriques antérieures. Si la question centrale reste la théorie des équations, des notions nouvelles et profondes relatives à la théorie des substitutions y affleurent. Il sera le point de départ des recherches des fondateurs de la nouvelle algèbre du XIX^e siècle, qui allaient considérablement élargir son champ.

17. Abel : l'équation du cinquième degré

L'impossibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degré supérieur ou égal à 5 fut finalement démontrée en 1826 par un jeune mathématicien norvégien, Niels Henrik Abel (1802-1829). Depuis Lagrange, on avait progressé dans l'étude des substitutions. Paolo Ruffini (1765-1822) avait montré en 1799 que si une fonction de cinq variables a moins de cinq valeurs distinctes, elle en a au plus deux, ce qui prouvait définitivement l'impossibilité de former une équation auxiliaire de Lagrange de degré inférieur à 5. Cauchy avait généralisé pour tout n ce résultat en 1815, et jeté les bases d'une théorie autonome des substitutions. Il avait proposé une notation maniable pour les substitutions, défini le produit de deux substitutions, l'inverse d'une substitution, son ordre, etc. Abel utilisera le résultat de Cauchy.

Ce qui est remarquable dans le mémoire d'Abel, c'est la façon dont il a formulé le problème qu'il avait à résoudre. Il s'en explique lui-même dans ces lignes posthumes : « En effet, on se proposait de résoudre les équations sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pouvait bien parvenir à la

résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité sans la trouver... Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. » Puisque résoudre algébriquement une équation, c'est exprimer ses racines par des fonctions algébriques des coefficients, Abel commence par une recherche de la forme générale des fonctions algébriques, qu'il classe minutieusement suivant le nombre de radicaux qu'elles contiennent et leur agencement dans l'expression. Puis il examine à quelles conditions doit satisfaire par sa nature une équation résolue algébriquement, c'est-à-dire qui admet comme racine une fonction algébrique, déterminée et classifiée précédemment.

Et cette deuxième question se précise : quelles sont les relations qui existent en cas de résolubilité d'une équation entre une racine et les autres? Abel aboutit au fait que, dans ce cas, on peut toujours « donner à la racine une forme telle que toutes les fonctions algébriques dont elle est composée puisse s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée ». Au terme d'un très long calcul, il prouve que toute expression rationnelle de cinq quantités qui prend cinq valeurs distinctes doit être de la forme $r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 + r_5x^5$, où les r_i sont des expressions symétriques de ces cinq quantités et x l'une d'elles. Il peut enfin conclure à l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale du 5^e degré.

Le Mémoire d'Abel, relativement ancien dans sa technique et dans sa forme, résolvait une question que se posaient les géomètres depuis des siècles et ouvrait de nouvelles voies de recherches : caractériser les classes d'équations résolubles. Abel étudia les équations qui proviennent de la division de la lemniscate, par analogie avec les équations cyclotomiques, qui sont équivalentes à la division du cercle en n arcs égaux et aboutit aux équations dites abéliennes, qui sont résolubles par radicaux.

Le long chapitre de l'algèbre classique se clôt avec ce mémoire. La théorie des équations sous sa forme traditionnelle est, pour l'essentiel, épuisée.

Ouvrages originaux d'accès aisé

- Abel N., *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le 4^e degré*, Œuvres, Éd. Sylow-Lie, Christiania, 1881, tome I.
- Diophante, *Les Arithmétiques*, texte établi et traduit par R. Rashed (Livres IV, V, VI, VII arabes), Paris, Les Belles Lettres, 1984.
- Diophante d'Alexandrie, *Les Six Livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones*, trad. du grec en français, Paul Ver Eecke, Bruges, Desclées de Brouwer et Cie, 1926.
- Gauss C. F., *Recherches arithmétiques*, trad. par A. C. M. Poulet-Delisle, Paris, Éd. Blanchard, 1953.
- Lagrange J.-L., *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Œuvres, tome 3, p. 205-421.

Quelques références qui nous ont particulièrement guidées

- Rashed R., *Recommandements de l'algèbre aux XI^e et XII^e siècles*, D. Reidel, Publishing Company.
- « Ibn Al-Haytham et le théorème de Wilson », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 22, n° 4, 1980 ;
- « Résolution des équations numériques et algèbre. Sharaf Al-din Al-Tusi, Viète », *ibid.*, vol. 12, n° 3, 1972 ;
- « L'extraction de la racine n^e et l'invention des fractions décimales », *ibid.*, vol. 18, n° 3, 1978 ;
- « L'analyse diophantienne au x^e siècle, l'exemple d'Al-Khazin », *Revue d'Histoire des sciences*, tome 32, 1979 ;
- « Les travaux perdus de Diophante », *ibid.*, tome 27, 1974, et tome 28, 1975.
- « Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes », Paris, Les Belles Lettres, 1984.
- Vuillemin J., *La Philosophie de l'algèbre*, Paris, PUF, 1962.
- Youschkevitch A. P., *Les Mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècle)*, Paris, Vrin, 1976.
- Nous signalons une très récente étude de A. Djebbar, *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^e et XIV^e siècles*, publications mathématiques de l'université d'Orsay, mai 1981.

4. Figures, espaces et géométries

1. Des origines pragmatiques

L'origine de la géométrie semble être liée directement aux exigences de la vie pratique : fabrication et ornementation d'objets, constructions d'habitations, de greniers et de monuments funéraires, calcul des aires des champs, etc. C'est en tout cas ce que laissent supposer les plus anciens documents dont nous disposons (tablettes babyloniennes, papyri égyptiens).

Bien que les mathématiques babyloniennes, on l'a vu, aient un caractère fondamentalement algébrique, l'origine des problèmes présentés par les scribes est souvent géométrique, comme dans le calcul de quelques aires et volumes très simples. Ces problèmes sont parfois accompagnés de dessins imprécis qui illustrent parfaitement le côté rudimentaire de la géométrie babylonienne.

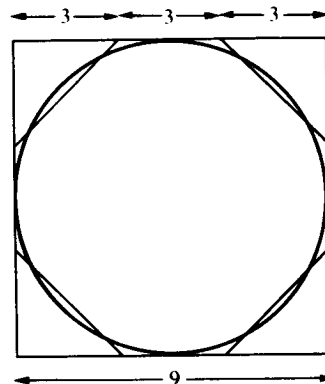
Il n'y a pratiquement pas de géométrie du cercle. On connaît cependant une règle indiquant son aire ; si p est le périmètre du cercle, son aire A est calculée par $A = \frac{p^2}{12}$, ce qui donne une valeur 3 pour π . D'autres sources font

penser que les Babyloniens utilisaient une valeur $3\frac{1}{8}$ pour π . Par ailleurs, les Babyloniens connaissaient les relations de similitude dans les triangles rectangles et semblent avoir utilisé couramment la relation de Pythagore entre les côtés d'un tel triangle.

Hérodote¹ fait remonter l'origine de la géométrie égyptienne à la nécessité, après chaque inondation du Nil, de redistribuer équitablement les champs à leurs propriétaires et confirme donc son origine matérielle. Comme celle des Babyloniens, la géométrie égyptienne est pratique ; elle ne raisonne pas, mais cherche par tâtonnements à établir des règles efficaces et satisfaisantes sur le plan de l'application, sans jamais être étudiée en soi. Les Égyptiens calculaient correctement les aires de quelques surfaces rectilignes comme le carré, le rectangle, le triangle et le trapèze et disposaient d'une assez bonne approximation de la surface A du cercle : $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$, ce qui correspond à une valeur $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1605$ pour π (cf. encadré 1).

1. Historien grec (v. 484 - v. 420 avant J.-C.).

1. Éventuelle origine de la valeur $\pi = 3\frac{1}{6}$ chez les Égyptiens



Dans un carré de côté 9 unités, on inscrit un octogone. Chacun des triangles isocèles en coin a une aire de $\frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5$ unités d'aire.

Aire du carré = $9^2 = 81$ unités d'aire.

L'aire de l'octogone étant la différence entre l'aire du carré et l'aire des quatre triangles isocèles vaut $81 - 4 \cdot 4,5 = 81 - 18 = 63$ unités d'aire.

L'aire de l'octogone est donc approximativement égale à l'aire d'un carré de côté 8 et, d'autre part, elle coïncide presque avec celle du cercle inscrit dans le carré.

L'aire A du cercle de diamètre d sera approximativement égale à celle du carré de côté $\frac{8}{9}d$, donc :

$$A = \left(\frac{16}{9}r\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2 = \pi r^2 \quad \text{où} \quad \pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3\frac{1}{6}.$$

La chambre funéraire du père de Ramsès II (vers 1300 avant J.-C.), restée inachevée, nous révèle la façon dont procédaient les Égyptiens pour décorer les parois et témoigne d'une connaissance des propriétés élémentaires de la similitude et des rudiments d'une théorie des proportions. Ils recouvraient la paroi d'un réseau régulier de droites horizontales et verticales se coupant à angle droit — que les arpenteurs construisaient géométriquement de la même manière que nous — et y reportaient le croquis préparé au préalable sur un réseau à mailles plus petites.

Par ailleurs, les scribes égyptiens étaient capables de calculer les volumes des matériaux nécessaires à la construction des monuments et des pyramides,

la contenance des greniers, etc. Ils multipliaient la surface de la base b par la hauteur h pour calculer le volume du cube, du prisme et du cylindre, et nous

→ savons qu'ils parvenaient à calculer celui de la pyramide $V = \frac{1}{3}bh$ et du tronç

de pyramide à bases carrées a^2 et b^2 , $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$, mais nous ignorons comment.

2. L'exigence démonstrative de la géométrie grecque

La géométrie grecque intègre les connaissances antérieures, mais rompt radicalement avec le pragmatisme de la géométrie babylonienne et égyptienne. D'emblée sous la forme déjà achevée dans laquelle elle nous apparaît dans les *Éléments* d'Euclide, elle s'impose comme une science abstraite et déductive. Nous avons déjà dit (au chapitre 2) la perfection de l'édifice euclidien, la rigueur de sa construction logique, l'élégance de ses démonstrations.

Les postulats posés à la base de l'édifice (cf. page 56) n'assurent pas seulement l'existence de figures fondamentales comme la droite et le cercle à partir desquelles les Grecs construisent toutes les autres figures considérées, mais déterminent également les propriétés de l'espace euclidien. Il est infini et homogène puisqu'on peut « prolonger continuellement, selon sa direction, toute droite finie » et, tous les angles droits étant égaux entre eux, les figures géométriques ne sont pas modifiées par des déplacements.

La dernière proposition du Livre I — « Dans les triangles rectangles, le carré décrit sur le côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés construits sur les côtés qui comprennent l'angle droit » — munit cet espace d'une métrique (mesure des distances). Ce théorème, déjà familier aux Babyloniens, aurait été introduit par Pythagore dans la mathématique grecque. Si les Babyloniens l'ont utilisé, les Grecs ont senti le besoin de le démontrer et d'en déduire des conséquences.

Dans l'espace de la géométrie euclidienne, la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Eudème, dans son histoire des mathématiques mentionnée par Proclus, fait remonter ce théorème aux pythagoriciens également. Dans la construction euclidienne, il découle d'une proposition de la théorie des parallèles (proposition 29, Livre I) : « Une droite qui tombe sur deux droites parallèles fait les angles alternes égaux entre eux, l'angle extérieur égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits. » (Cf. fig. 1.)

Dans la démonstration, Euclide fait appel au postulat des parallèles (cf. chapitre 2, page 56), qui occupe une place un peu à part dans l'édifice euclidien. De la proposition qui précède, Euclide déduit la construction par un point donné d'une droite parallèle à une droite donnée (proposition 31), puis enfin le théorème sur la somme des angles d'un triangle.

Examinons maintenant le procédé de démonstration euclidien sur l'exemple du théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle, établi au Livre III (propositions 35 et 36) :

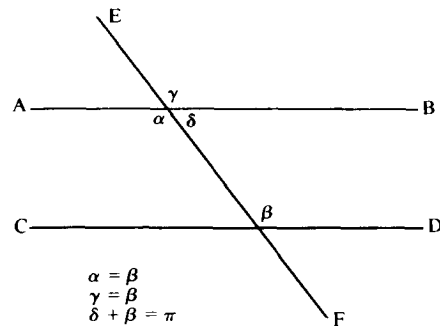


Fig. 1

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta \\ \gamma &= \delta \\ \delta + \beta &= \pi\end{aligned}$$

« Si, dans un cercle, deux cordes se coupent mutuellement, le rectangle compris sous les segments de l'une de ces cordes est égal au rectangle compris sous les segments de l'autre. »

« Que, dans le cercle ABCD, les deux cordes AC, BD se coupent mutuellement au point E : je dis que le rectangle compris sous les droites AE, EC est égal à celui qui est compris sous les droites DE, EB », c'est-à-dire $AE \cdot EC = DE \cdot EB$.

Euclide considère d'abord le cas particulier où le point d'intersection des deux cordes est le centre du cercle (cf. fig. 2). Comme $AE = EC = DE = EB = R$ (le rayon du cercle), la propriété est trivialement vérifiée.

La démonstration du cas général s'appuie sur quelques théorèmes précédant celui sur la puissance dans l'architecture des *Éléments* :

- la construction du centre d'un cercle donné;
- l'abaissement d'une perpendiculaire depuis un point sur une droite;
- le théorème de Pythagore;
- la proposition 3 du Livre III (cf. fig. 3) :

« Si, dans un cercle, une droite qui passe par le centre coupe en deux parties égales une droite qui ne passe pas par le centre, la première droite

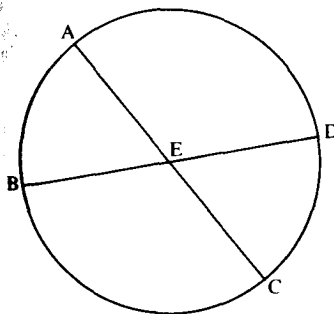


Fig. 2

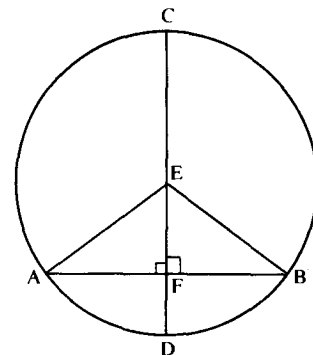


Fig. 3

coupera la seconde à angles droits; et si la première coupe la seconde à angles droits, elle la coupera en deux parties égales.»

Pour démontrer que $AF = FB$ sous l'hypothèse que les angles AFE , BFE valent chacun un droit, Euclide déduit de $EA = EB = R$ l'égalité des deux angles EAF et EBF . Or deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles respectivement égaux sont égaux.

— La proposition 5 du Livre II :

« Si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite qui est placée entre les points de section est égal au carré de la moitié de cette droite. »

Sa démonstration équivaut à la construction géométrique d'une racine de l'équation quadratique (cf. chapitre 2).

Pour démontrer la proposition 35, Euclide procède de la manière suivante (cf. fig. 4) :

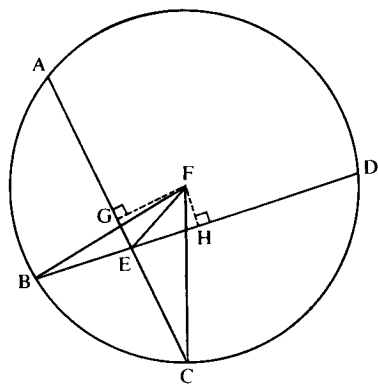


Fig. 4

Il construit le centre F du cercle $ABCD$, depuis F abaisse des perpendiculaires FG et FH sur les cordes AC et BD et trace les droites FB , FC et FE . D'après la proposition 3 du Livre III, la droite AG est égale à la droite GC et, d'après la proposition 5 du Livre II, $AE \cdot EC + GE^2 = GC^2$.

Euclide ajoute GF^2 à cette égalité :

$$AE \cdot EC + GE^2 + GF^2 = GC^2 + GF^2.$$

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$FE^2 = EG^2 + GF^2,$$

$$FC^2 = CG^2 + GF^2,$$

donc,

$$AE \cdot EC + FE^2 = FC^2.$$

De $FC = FB$, il suit que $AE \cdot EC + FE^2 = FB^2$.

De manière analogue, $DE \cdot EB + FE^2 = FB^2$

et

$$AE \cdot EC + FE^2 = DE \cdot EB + FE^2.$$

Finalement $AE \cdot EC = DE \cdot EB$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans la proposition 36, Euclide examine le cas où le point E se trouve à l'extérieur du cercle.

Les activités d'Euclide étaient liées à celle du musée d'Alexandrie et il est probable que ses élèves y ont formé une véritable école. Nous avons déjà étudié (au chapitre 2) l'angle sous lequel Apollonius, qui faisait partie de cette école, a abordé la théorie des sections coniques. Archimède a obtenu des résultats très brillants en géométrie des aires. Il a développé la méthode d'exhaustion et y a acquis une grande virtuosité.

Après les brillantes contributions d'Euclide, d'Apollonius et d'Archimède, la géométrie grecque stagne et décline très rapidement, les Alexandrins se bornant à exploiter les résultats de ces trois géomètres sans élargir le champ des connaissances.

Héron d'Alexandrie (au tournant de notre ère), par exemple, commente les *Éléments* et utilise les résultats d'Archimède pour démontrer de nouveaux théorèmes dans le cadre de la géométrie euclidienne, mais utilise aussi les procédés et les formules d'approximation des Égyptiens. Ses recherches sont plutôt orientées vers la pratique; il applique la mesure des aires et des volumes à la géodésie, à l'arpentage, à la maçonnerie et à l'architecture, il conçoit des instruments de mesure, des automates, des leviers, des machines de guerre, etc. Son œuvre porte les traits caractéristiques de la géométrie de la période hellénistique.

3. Les contributions arabes

Les recherches des Arabes s'inscrivent dans le champ défini par la géométrie grecque. Au début du IX^e siècle, les principaux ouvrages grecs sont traduits en arabe et un flot de commentaires et de résumés permet aux Arabes d'assimiler, puis d'exploiter ces connaissances. Les études sont souvent critiques; ainsi la forme particulière du 5^e postulat d'Euclide (postulat des parallèles) n'échappe guère à leur attention et, à la suite de Ptolémée, qui confère le statut de théorème à ce postulat, ils tentent de le démontrer (voir plus loin le paragraphe sur les géométries non euclidiennes).

Les Arabes développent des méthodes de calcul d'aires et de volumes utilisant — souvent librement — le procédé grec d'exhaustion. Le *Livre du calcul des figures planes et sphériques* des frères Banu Musa (IX^e siècle), qui a exercé une grande influence sur l'évolution de la géométrie à Bagdad (et qui nous est parvenu dans une traduction latine de Gérard de Crémone sous le titre *Liber trium fratrum de geometria*), contient un ensemble de propositions sur l'aire du cercle, dont la dernière assigne au rapport de la circonférence au diamètre une valeur qui, comme chez Archimède, se situe entre $3 \frac{10}{71}$ et $3 \frac{1}{7}$.

Thabit ibn Qurra (836-901), disciple des frères Banu Musa, familier des œuvres d'Archimède, d'Euclide et d'Apollonius (dont il en a traduit ou commenté quelques-unes), calcule l'aire d'un segment de parabole en faisant la somme des aires des trapèzes inscrits (cf. chapitre 5, page 175). Il considère également des corps de révolution engendrés par la rotation de segments de parabole et en calcule le volume.

Les auteurs arabes ont développé la géométrie de la sphère pour les besoins de l'astronomie. Pourtant, les formules qu'ils indiquent pour le volume de la sphère ne sont que des approximations grossières. Citons celle d'Al-Karagi : $V = d^3 \left(1 - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2}\right)^2$, qui identifie le volume de la sphère à celui d'un parallélépipède droit dont la base est un carré de côté égal au quart de la circonférence du grand cercle $\frac{\pi d}{4}$ (avec $\pi = \frac{22}{7}$) et dont la hauteur est égale au diamètre d . Rappelons qu'Archimède avait su démontrer la formule exacte grâce à la méthode d'exhaustion.

Les besoins pratiques de l'arpentage, de l'architecture et de la technique dictaient aux géomètres arabes une simplification des méthodes de construction : sur le terrain, il s'avérait parfois difficile de tracer les cercles de rayons différents; aussi, les géomètres ont-ils tenté d'effectuer les constructions en gardant l'ouverture du compas constante.

Abu-l'Wafa, dans son ouvrage consacré à la géométrie appliquée, le *Livre sur les constructions géométriques nécessaires à l'artisan*, a traité les constructions fondamentales (perpendiculaires, parallèles, partage d'une droite, etc.) à l'aide d'une simple règle et d'un compas à ouverture constante. Ces recherches sont redevenues populaires au XVI^e siècle en Italie, où elles étaient reprises par les mathématiciens de la Renaissance (Léonard de Vinci, Benedetti, Tartaglia et Cardan).

Les Arabes se contentent d'ailleurs souvent de constructions approximatives. Ainsi les frères Banu Musa procèdent à l'aide d'un cercle et d'une règle graduée à la trisection de l'angle, problème équivalant à la résolution d'une équation du 3^e degré, donc non réalisable à la règle et au compas. Ils ont également imaginé un instrument composé de règles glissant sur coulisses pour déterminer deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données.

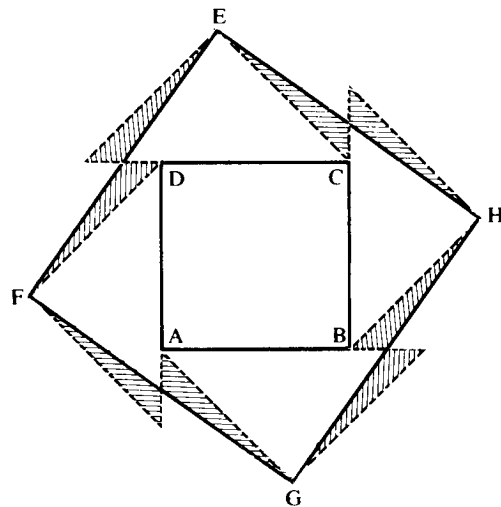
Une partie de l'ouvrage d'Abu-l'Wafa est consacrée à la division d'un carré en sommes de plusieurs carrés et à l'assemblage d'un nombre de carrés en un carré unique (cf. encadré 2). Le livre se termine avec une construction des cinq polyèdres réguliers et avec celle, tout à fait originale, de cinq polyèdres semi-réguliers, dont trois constructions ne sont pas exactes.

Durant la période s'étalant entre l'année 800 et le milieu du XIII^e siècle, les savants arabes se sont donc approprié les connaissances des géomètres grecs et les ont même étendues. Il n'en va pas de même pour le monde médiéval occidental. Hormis quelques fragments de géométrie grecque accessibles en latin — Boèce, par exemple, avait réuni et traduit quelques traités élémentaires, dont deux à cinq livres des *Éléments* allégés de leurs démonstrations —, l'ignorance de la géométrie grecque est quasi totale jusqu'à la Renaissance. L'héritage grec transmis par l'intermédiaire des savants arabes et des érudits byzantins est alors accueilli avec enthousiasme.

4. La perspective et la naissance de la géométrie projective

Le contact avec la philosophie aristotélicienne et la science grecque réveille l'intérêt pour la nature et ses structures. Mus par une curiosité

2. Construction par Abu-l'Wafa d'un carré EFGH trois fois plus grand qu'un carré ABCD donné



Pour Abu-l'Wafa, il s'agit de découper, puis d'assembler, trois petits carrés en un carré trois fois plus grand.

Il en découpe deux suivant leur diagonale et les accole aux côtés du troisième.

Il relie les sommets E, F, G, H entre eux et obtient un carré dont l'aire est égale au triple de l'aire du carré ABCD; en effet, les petits triangles qui dépassent le carré EFGH sont égaux aux petits triangles situés à l'intérieur de ce carré.

insatiable, les hommes de la Renaissance entreprennent d'explorer son fonctionnement. Leur désir de connaissance anime leur volonté de reproduire le réel et d'imiter la nature. Peindre est un acte scientifique pour Léonard de Vinci puisqu'il permet de révéler la nature réelle. Dès le XV^e siècle, les artistes italiens — praticiens universels — tentent de représenter dans un plan des figures de l'espace à partir du point de vue que constitue l'œil et, voyant dans les mathématiques l'essence de la nature, ils mettent au point des règles géométriques permettant de traduire la ressemblance avec le réel : les règles de la perspective. L'architecte florentin F. Brunelleschi (1377-1446) semble avoir été le premier à inventer ces règles. Généralement, les praticiens de la Renaissance interprètent le tableau comme une « fenêtre » à travers laquelle le regard explore l'espace, comme une section plane « transparente » du cône visuel, qui n'est rien d'autre que le

cône formé par les rayons visuels émis par l'œil identifié à un point qui sera le sommet du cône (cf. encadré 3).

Dès le début du XVI^e siècle paraissent de nombreux traités de perspective. Si quelques-uns s'efforcent de présenter une théorie cohérente (tels celui de Piero della Francesca, écrit en 1470, et celui d'Albert Dürer, en 1525), la plupart ne sont que simples recueils de préceptes et de règles, orientés vers la pratique des artistes. Le *Trattato della pittura* de Leone B. Alberti, imprimé en 1511 à Nuremberg, soulève une question qui sera au XVII^e siècle à l'origine du développement de la géométrie projective : quelles sont les propriétés géométriques communes à deux perspectives d'une même figure ?

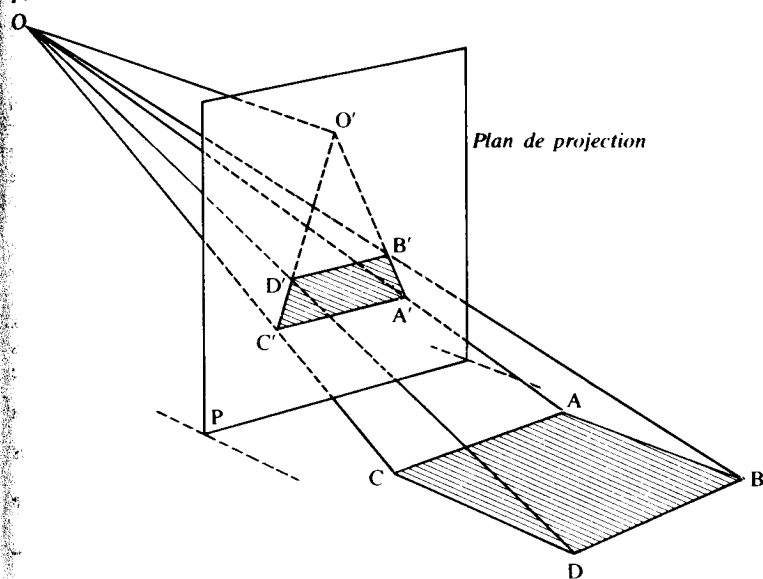
Pendant tout un siècle encore, la portée des méthodes de perspective restera relativement restreinte et ne dépassera guère les cadres des tableaux d'artistes. Du point de vue mathématique, l'idée fondamentale de la perspective est celle de projection; celle-ci est également au centre des préoccupations des cartographes, qui déploient alors une intense activité afin de rendre compte du considérable élargissement des connaissances géographiques dû aux découvertes extraordinaires des explorateurs européens de la fin du XV^e siècle. L'intégration des méthodes projectives dans le corps des mathématiques enrichira et renouvellera la géométrie. Cette dernière ne prendra son essor que tardivement (vers 1600), après que de multiples éditions des *Sections coniques* d'Apollonius seront sorties de presse. L'intérêt pour cette théorie va grandissant avec l'usage que Kepler (1609) en avait fait dans la formulation de ses lois du mouvement des planètes. L'éclosion des méthodes projectives révolutionnera les conceptions de la théorie des coniques et permettra d'unifier ses techniques.

L'œuvre de Desargues

Ce renouveau est l'œuvre d'un praticien, architecte, ingénieur et autodidacte familier des ouvrages d'Apollonius. Le Lyonnais Girard Desargues (1591-1661), peu enclin à la spéculation, entend faire profiter la théorie des coniques des acquis des peintres en perspective et, inversement, améliorer les techniques des artistes, ingénieurs et tailleurs de pierre en les formulant en termes mathématiques concis. Son principal ouvrage, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan* (1639), ne fut tiré qu'à cinquante exemplaires, que l'auteur distribuait à ses amis géomètres afin de faciliter la discussion de ses thèses, et fut rapidement introuvable. Jusqu'en 1950, où l'on découvrit un exemplaire original à la Bibliothèque nationale, on ne possédait qu'une copie faite par de La Hire (découverte en 1854 par M. Chasles et reproduite en 1864 par Poudra, éditeur des œuvres de Desargues). La diffusion limitée du *Brouillon project* explique peut-être le peu de retentissement qu'il a eu. A cela s'ajoute une lecture réputée difficile, due à une terminologie curieuse et originale, utilisant une symbolique botanique. Elle s'inscrit dans l'esthétique baroque qui exprime le bouillonnement de la vie par des métaphores végétales. Elle témoigne aussi de la volonté commune à Desargues et à ses amis, membres de l'« Académie Mersenne » (1635), de renouveler le vocabulaire afin d'éviter la confusion et

3. La perspective

Point de vue



Mathématiquement parlant, la perspective est une projection centrale faite d'un point O, le point de vue, sur un plan P donné, le plan de projection, qui à tout point M de l'espace fait correspondre un point M', intersection de la droite OM avec le plan P.

Cette application de l'espace sur un plan n'est pas définie pour les points M appartenant au plan parallèle à P et passant par O.

l'ambiguïté inhérentes à l'usage des termes du langage courant. Ainsi, Desargues appelle « rouleur » un solide cylindrique ou conique; « plan de coupe du rouleur » un plan coupant autre que la base; « défilement » l'ellipse; « égalation » la parabole et « outrepassement » l'hyperbole. Ces trois derniers termes sont intéressants en ce qu'ils rappellent l'antique méthode d'application des aires (cf. la terminologie chez Apollonius, page 60).

Desargues pose comme définition de départ des coniques leur génération comme sections d'un cône par un plan, dont il conçoit d'ailleurs toutes les positions possibles, ce qui l'amène à considérer le cercle et un système de deux droites parmi ces courbes. Puis il imagine de leur transférer les propriétés du cercle qui sert de base au cône en interprétant les coniques comme projections du cercle à partir du sommet du cône sur le plan coupant. Cette innovation lui permet d'étudier au préalable les propriétés du cercle et de les étendre, sans démonstration nouvelle, aux coniques. L'avantage de

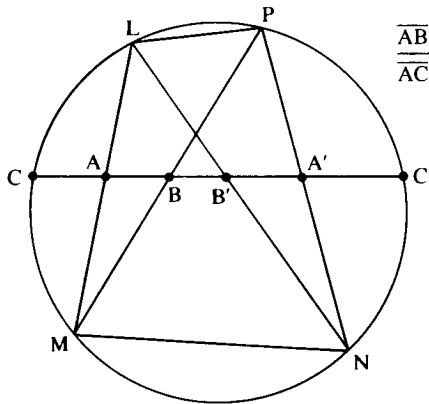
cette conception projective apparaît aussitôt : elle permet de remplacer l'étude séparée de chaque type de conique par une théorie générale valable pour tous les types de coniques.

Alberti avait constaté dans son *Della Pittura* que la perspective transforme un système de droites parallèles en un système de droites concurrentes et, afin de compléter la correspondance entre les deux systèmes, Desargues introduit un point nouveau sur chaque droite, « le point à l'infini ». Ce dernier appartiendra à chacune des droites du système et, par convention, Desargues dira que c'est le point de concours du système de droites parallèles. Droites concurrentes et droites parallèles sont ainsi de même nature, sauf que le point d'intersection des droites parallèles est rejeté à l'infini. De manière analogue, il introduit la notion de « droite à l'infini ».

Desargues établit sur le cercle une propriété des coniques, qui lie six points choisis arbitrairement sur une conique. Il considère un quadrilatère LMNP inscrit dans un cercle (cf. encadré 4) et une transversale coupant les côtés opposés LM et PN du quadrilatère en A, A', les deux autres côtés opposés LN et MP en B, B' et le cercle en C, C'. Les trois couples de points (A, A'), (B, B') et (C, C') sont alors « en involution », c'est-à-dire que $\frac{AB \cdot AB'}{AC \cdot AC'} = \frac{A'B \cdot A'B'}{A'C \cdot A'C'}$ (cf. encadré 5). Cette notion remonte à Ménélaüs et à Pappus, même si le terme est de Desargues. Ces six points sont conjugués deux à deux.

Comme la conique n'est chez Desargues qu'une perspective du cercle, le

4. Le théorème de Desargues sur l'involution



$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB'}}{\overline{AC} \cdot \overline{AC'}} = \frac{\overline{A'B} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{A'C} \cdot \overline{A'C'}}$$

En géométrie projective, on considère toujours le quadrilatère complet : si L, M, N, P sont quatre points, trois à trois non alignés, il y a six manières possibles de les relier par des droites; ce sont les six côtés du quadrilatère complet.

Sachant que Girard Desargues désigne par *bornes* les sommets d'un quadrilatère, par *bornale droite* une droite passant par deux des sommets, par *plate coupe de rouleau* une section plane d'un cône et par *but d'une ordonnance de droites* le point d'intersection d'un faisceau de droites, le théorème sur l'involution s'énonce :

« Quand en un plan, à 4 points B, C, D, E comme bornes, en quelconque plate coupe de rouleau, passent 3 couples de droites bornales BCF, EDF, BEN, CDN, BDG, CEG et qu'aux 2 buts G et N des 2 ordonnances de 2 quelconques couples bornales passe une autre droite GN à l'égard de la coupe de rouleau au bord de laquelle sont les 4 bornales B, C, D, E, cette droite GN est transversale des droites de l'ordonnance de la troisième de ces couples de bornales au but F, c'est-à-dire que F, X, G, Y sont en involution. »

(Brouillon Project, éd. Poudra, 1864, page 186)

théorème sera valable pour un quadrilatère inscrit dans une conique si l'on a démontré au préalable que la perspective conserve la propriété d'un ensemble de points d'être en involution. Desargues se sert des travaux de Ménélaüs et de Pappus pour le montrer.

Puis Desargues considère les cas où deux points conjugués se confondent;

si $B = B'$,

$$\frac{(AB)^2}{AC \cdot AC'} = \frac{(A'B)^2}{A'C \cdot A'C'}$$

si, en plus, $C = C'$,

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{A'B}{A'C}\right)^2$$

les quatre points A, A', B, C forment une *division harmonique*, c'est-à-dire que les deux points A et A' sont conjugués par rapport aux points doubles B et C d'une involution.

La définition moderne en termes de bi-rapport a été donnée plus tard (en 1827 par Möbius). Desargues a introduit cette notion dans une annexe à la *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral, ensemble les places et proportions des fortes et foibles touches, teintes ou couleurs* dans lequel le graveur A. Bosse tente de vulgariser les idées de son maître et de leur gagner une audience plus large (1648).

Le bi-rapport (A, B, C, D) de quatre points alignés est défini par :

$$(A, B, C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

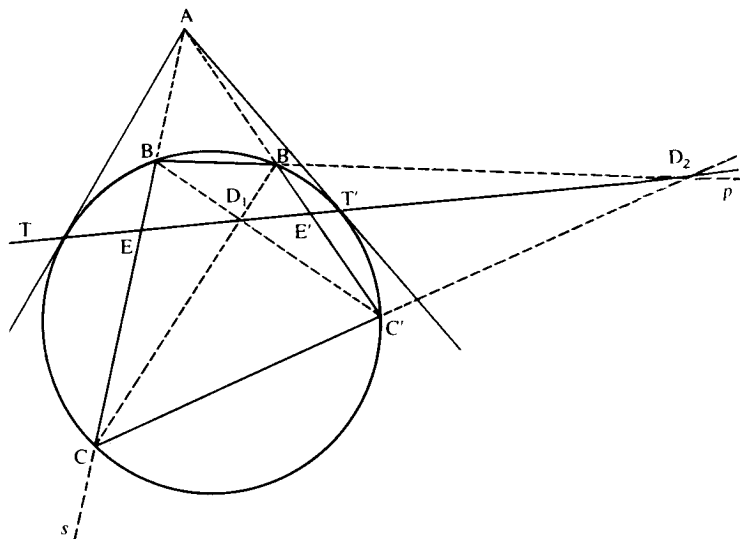
Lorsqu'il vaut -1 , les quatre points forment une division harmonique. Lorsqu'un des quatre points est le point à l'infini, son conjugué harmonique est le milieu du segment formé par les deux autres points.

Muni de la notion d'ensemble harmonique et de son invariance par projection (puisque la projection conserve la propriété d'un ensemble de

points d'être en involution), Desargues élabore la théorie des polaires d'un point par rapport à un cercle, puis l'étend par projection à partir d'un point en dehors du plan de la figure, puis, par section de la projection, à toutes les coniques. Si A est un point extérieur au cercle — point appelé pôle —, alors il existe sur toute sécante s issue de A et coupant le cercle aux points B et C un quatrième point E conjugué harmonique de A par rapport à B et C (cf. encadré 6). Pour toutes les sécantes s , les quatrièmes points conjugués harmoniques de A par rapport à B et C sont alignés et se trouvent sur la polaire p de A. La même chose vaut pour un point A à l'intérieur du cercle. Si A est un point extérieur, la polaire de A joint les points de contact des tangentes au cercle issues de A. Apollonius avait déjà étudié les propriétés harmoniques des polaires, mais il les avait établies séparément pour chaque type de conique.

6. La polaire d'un point par rapport à un cercle

$$(A, E, B, C) = \frac{BA}{BE} : \frac{CA}{CE} = (A, E', B', C') = -1$$



Si $BCC'B'$ est un quadrilatère inscrit dans le cercle dont deux diagonales se coupent en A, alors la polaire passera par les deux autres points d'intersection de diagonales D_1 et D_2 .

Citons encore un théorème important que Desargues a démontré dans l'annexe à l'ouvrage de Bosse, qui sera la base de la théorie de l'homologie développée par Poncelet :

« Si deux triangles, situés dans l'espace ou dans un même plan, ont leurs sommets placés deux à deux sur trois droites concourant en un même point, leurs côtés se rencontrent, deux à deux, en trois points situés en ligne droite, et réciproquement. » (Cf. fig. 5.)

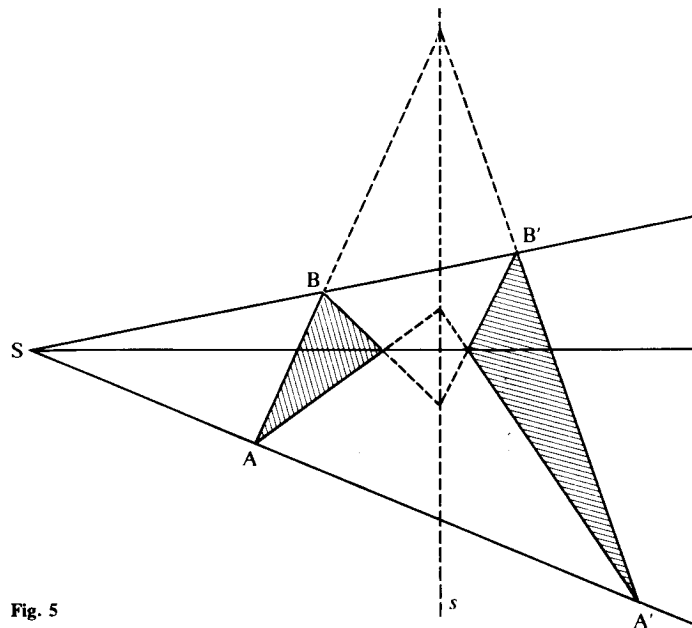


Fig. 5

Vu le relatif insuccès de ses idées en géométrie, Desargues se consacre entièrement aux applications et commence, dès 1645, une carrière d'architecte.

Ses idées sont cependant reprises par deux disciples immédiats, le jeune Blaise Pascal (1623-1662) et Philippe de La Hire (1640-1718).

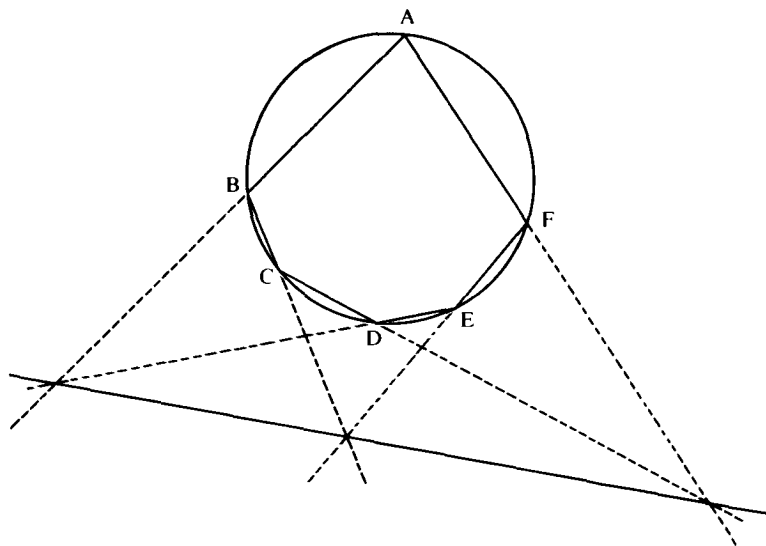
Pascal et de La Hire

Pascal assimile très rapidement les nouvelles méthodes projectives et en comprend tout l'intérêt et toute l'importance. Il rédige à l'âge de seize ans un petit traité sur les coniques utilisant les procédés de Desargues. Nous ne connaissons cet écrit que par une remarque de Leibniz qui l'a vu à Paris et l'a

décrit dans une lettre au neveu de Pascal. L'*Essai sur les coniques*, écrit en 1640, connaît le même sort, mais est redécouvert en 1779. Dans les deux Mémoires est énoncé le célèbre théorème de Pascal sur l'hexagramme mystique. Il occupe une place centrale dans l'étude des propriétés des coniques (cf. encadré 7). Pascal en esquisse une démonstration par perspective : les trois points d'intersection des couples de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle sont alignés et il suffit de transformer cette figure par une projection centrale pour étendre le théorème à toutes les coniques.

De La Hire utilise les méthodes projectives pour présenter, dans *Sectiones conicae* (1685), une synthèse presque complète des propriétés connues des sections coniques. Il y ajoute quelques résultats nouveaux.

7. Le théorème de Pascal : l'hexagramme mystique



Si ABCDEF est un hexagone inscrit dans une conique, alors les points de rencontre des trois couples de côtés opposés AB et DE, BC et EF, CD et FA sont en ligne droite.

En théorie des polaires, il fait parcourir au pôle P une droite q et démontre que la polaire p de P tourne alors autour du pôle Q de la droite q (cf. fig. 6).

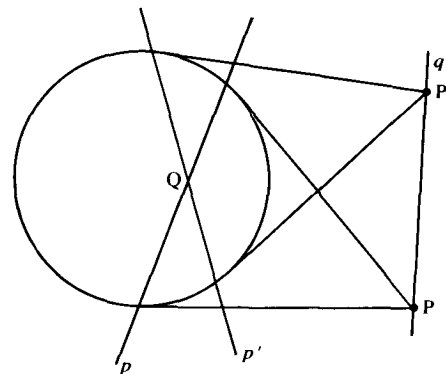


Fig. 6

5. La géométrie analytique et l'étude des courbes au XVIII^e siècle

Après les travaux de La Hire, les méthodes projectives tombent dans l'oubli pendant près d'un siècle. Cela s'explique en partie par l'éclosion au XVII^e siècle des méthodes infinitésimales, qui monopolisent les intérêts des mathématiciens, et par la grande popularité de la géométrie des coordonnées publiée par R. Descartes dans la *Géométrie* (1637). Un conflit d'idées oppose d'ailleurs Desargues et Descartes. Bien que les deux hommes soient à la recherche d'une démarche générale capable d'unifier et de simplifier les méthodes mathématiques, ils ne sont pas d'accord sur les moyens à employer : Desargues croit en la puissance de la géométrie, Descartes n'a foi qu'en la vertu de l'algèbre.

Descartes conçoit la géométrie analytique plutôt comme une application de l'algèbre à la géométrie. Il utilise d'abord l'algèbre comme outil dans la résolution des problèmes de constructions géométriques, puis peu à peu l'idée d'équation d'une courbe émerge.

« Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étaient inconnues. »

L'idée d'équation d'une courbe apparaît plus clairement chez P. de Fermat, qui a découvert, indépendamment de Descartes, vers 1629, le principe de base de la géométrie analytique. Il ne l'a publié qu'en 1679 dans son *Isagoge* (*Introduction aux lieux plans et solides*).

La méthode de Fermat se fonde sur une correspondance bijective entre les points du plan et les couples de nombres (x, y) et associe des équations $f(x, y) = 0$ aux courbes.

Son point de départ est l'étude des grands traités d'Alexandrie et de ceux d'Apollonius en particulier, qu'il essaie de traduire dans le langage algébrique de Viète. La position d'un point P sur une courbe est fixée par une longueur A mesurée sur une droite de base à partir d'une origine O jusqu'à un point Z et par une longueur E de Z à P. L'extrémité de E décrit la courbe : « Dès qu'une équation contient deux quantités inconnues, il y a un lieu correspondant, et le point extrême de l'une de ces quantités décrit une ligne droite ou une ligne courbe. » (Cf. fig. 7.)

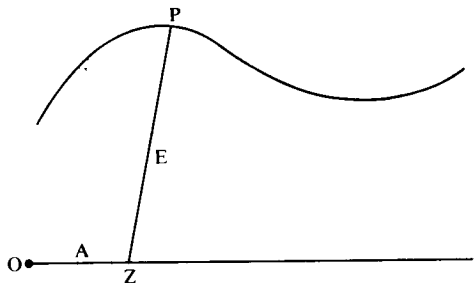


Fig. 7

Fermat étudie des équations algébriques en A et en E ainsi que les courbes qu'elles décrivent. Il reconnaît que les équations du premier degré représentent des droites et celles du second degré des coniques.

Descartes rompt avec l'ancienne classification des courbes en courbes planes (celles qu'on peut construire à l'aide de la règle et du compas), courbes solides (les sections coniques) et courbes linéaires (toutes les autres comme la conchoïde, la spirale, la quadratrice, etc.) et introduit deux nouvelles classes, les courbes géométriques et mécaniques, nous dirions les courbes algébriques et transcendentes (cf. chapitre 6). Il déclare seules les premières comme acceptables et les classe selon le degré des équations associées.

Une courbe algébrique d'ordre n est une courbe algébrique dont l'équation peut se ramener, par des opérations rationnelles, à un polynôme de degré n égalé à zéro. Ainsi, la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ est algébrique du second ordre, puisque son équation se ramène, par des élévations au carré, à $4xy - (1 - x - y)^2 = 0$.

Vu la commodité de ses procédés, la facilité de ses algorithmes, la géométrie analytique s'est fait immédiatement de nombreux adeptes et ses méthodes initiales ont été étendues : F. van Schooten donne (en 1649) les formules de changement de coordonnées, Wallis considère le premier (en 1655) des abscisses et ordonnées négatives; Newton puis Jacques Bernoulli inventent les coordonnées polaires situant les points du plan par rapport à un point fixe et une droite fixe passant par ce point. De nouvelles courbes sont étudiées : la lemniscate, la spirale logarithmique, la chaînette, la cycloïde (cf. chapitre 5, page 180), etc.

Au XVIII^e siècle, les préoccupations des mathématiciens sont plutôt d'ordre physique et nécessitent souvent une bonne connaissance des courbes et des surfaces : les trajectoires des corps en mouvement sont des courbes, les corps sont entourés de surfaces.

Les progrès rapides des techniques du calcul infinitésimal fournissent des outils nouveaux adaptés à l'étude de ces courbes et surfaces. Ils permettent d'examiner les propriétés qui varient d'un point à l'autre. L'interaction des méthodes infinitésimales et des procédés analytiques est à l'origine de la géométrie différentielle, dont le développement est étroitement lié à celui de la géométrie analytique.

L'étude systématique des courbes algébriques planes, et en particulier l'examen des courbes d'ordre supérieur, conduit à un élargissement de l'éventail des propriétés connues des courbes. En effet, les courbes d'ordre supérieur à deux présentent des singularités inexistantes dans celles d'ordre un ou deux : les points d'inflexion, les points multiples et les points de rebroussement (cf. encadré 8).

Les intersections de courbes sont étudiées. Colin Maclaurin énonce dans *Geometria organica* (1720) la propriété suivante : « Deux courbes algébriques planes d'ordres m, n ont en général $m \cdot n$ points communs. » Euler et Gabriel Cramer (1704-1752) essaient en vain de l'établir, puis Étienne Bezout (1730-1783) en donne une démonstration plus complète. Son nom est resté attaché au théorème en question.

L'étude des surfaces reçoit une première impulsion des tentatives de résolution du problème de la forme de la Terre, mis au concours par l'Académie de Paris. La représentation des surfaces plongées dans l'espace par des équations $W(x, y, z) = 0$ entre trois coordonnées est mise au point. Clairaut établit les équations de quelques surfaces quadriques (sphère, cylindre, paraboloides, hyperboloides à deux nappes, ellipsoïde) et Euler étudie systématiquement l'équation générale du second degré en trois variables, qui représente les quadriques.

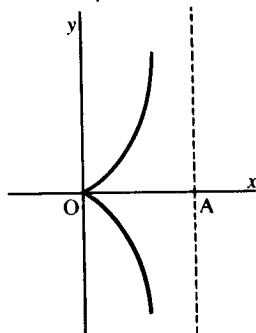
Clairaut montre qu'on peut décrire les courbes gauches comme intersections de deux surfaces.

Vers la fin du siècle, Gaspard Monge obtient d'importants résultats de géométrie différentielle dans l'espace. Il renoue dans ses travaux avec les méthodes de la géométrie pure, qui, après ses premiers succès fulgurants, avait déperissé et pratiquement disparu du champ des mathématiques. Monge préconise de faire l'étude des figures de l'espace sans négliger aucun des deux aspects, analytique et géométrique. Il saura donner une première impulsion au renouveau de la géométrie pure en créant la géométrie descriptive, que nous allons aborder maintenant.

6. La géométrie descriptive. Gaspard Monge

Prenant une part active dans la réorganisation de l'enseignement en France durant la période révolutionnaire, Gaspard Monge (1746-1818) introduit la géométrie descriptive dans les programmes de l'École normale de l'an III. C'est un des rares cas en histoire des sciences où une discipline

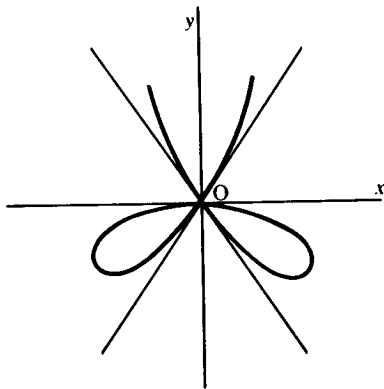
O est un point stationnaire



La *cissoïde droite* (de Dioclès)
d'équation cartésienne
 $x(x^2 + y^2) = ay^2$.
En coordonnées polaires
(ρ, θ) :

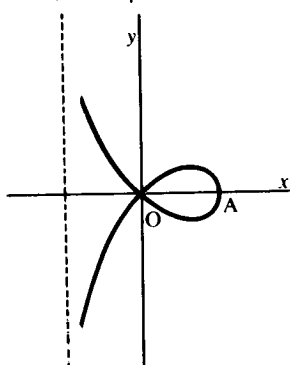
$$\rho = a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

O est un point triple

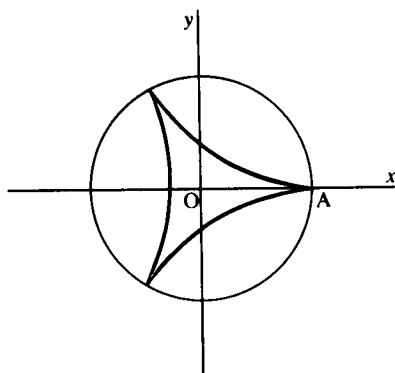


Quartique d'équation cartésienne
 $ay^3 - 3ax^2y = x^4$.

O est un point double



La *strophoïde droite* (considérée par Roberval en 1645).
Son équation cartésienne est :
 $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.
En coordonnées polaires :

$$\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$$


Hypocycloïde à trois rebroussements (étudiée par Euler en 1745).
Son équation cartésienne est :

$$3(x^2 + y^2)^2 + 8ax(y^2 - x^2) + 6a^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0.$$

apparaît soudainement avec un corps de savoir déjà constitué, des méthodes propres et un domaine d'applications déjà bien délimité. Mais il est certainement schématique aussi de dire que Monge en est le créateur exclusif. Même s'il semble difficile de lui trouver d'éventuels précurseurs, on peut rechercher les origines de la géométrie descriptive du côté des techniques graphiques des praticiens. Monge l'aurait d'ailleurs élaborée dans les années 1760-1770 alors qu'il était chargé à l'École du génie de Mézières de résoudre un délicat problème de calcul du relief d'une fortification.

Dans ses leçons à l'École normale de l'an III, dont le texte recueilli par les sténographes attachés à l'école fut réédité en 1799 sous le titre de *Géométrie descriptive*, Monge précise les principaux objets de la discipline. « Le premier est de représenter avec exactitude sur des dessins qui n'ont que deux dimensions les objets qui en ont trois et qui sont susceptibles d'une définition rigoureuse. Le second est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. » Le principe de cette technique consiste à figurer chaque point de l'espace par ses projections orthogonales m et m_1 sur deux plans perpendiculaires entre eux (le plan horizontal et le plan frontal). Le second de

ces plans est ensuite supposé rabattu sur le premier par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de leur intersection, la ligne de terre. Les deux projections m et m' du point M se trouvent alors sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, la *ligne de rappel du point M* (cf. fig. 8). A tout point M de l'espace correspond un couple unique de projections m et m' , l'épure de M, et inversement on peut montrer qu'à tout couple de projections m et m' situées sur une même ligne de rappel correspond un point unique de l'espace. Cette correspondance biunivoque permet de déduire des épures planes des conclusions valables pour les figures à trois dimensions.

Pour Monge, la géométrie descriptive est avant tout un procédé graphique permettant de simplifier la résolution des nombreux problèmes pratiques que posent la coupe des pierres, la charpente, les ombres, la perspective, la topographie, la théorie des machines, etc.

Son œuvre contient les ferments du développement ultérieur de la géométrie projective. Ses disciples, Brianchon, Carnot et Poncelet, n'auront qu'à les expliciter et à les développer.

7. Le traité de Poncelet : synthèse et manifeste de la géométrie projective

Jean-Victor Poncelet (1788-1867) développe ses premières idées en géométrie projective dans une geôle russe. Officier de l'armée napoléonienne, fait prisonnier pendant la campagne de Russie, il reconstruit, sans l'aide de notes ou d'ouvrages de référence, les connaissances géométriques, qu'il avait apprises dans les cours de Monge et de Carnot. C'est sur cette base qu'il appuie ses propres recherches.

Le *Traité des propriétés projectives des figures*, publié en 1822, est une

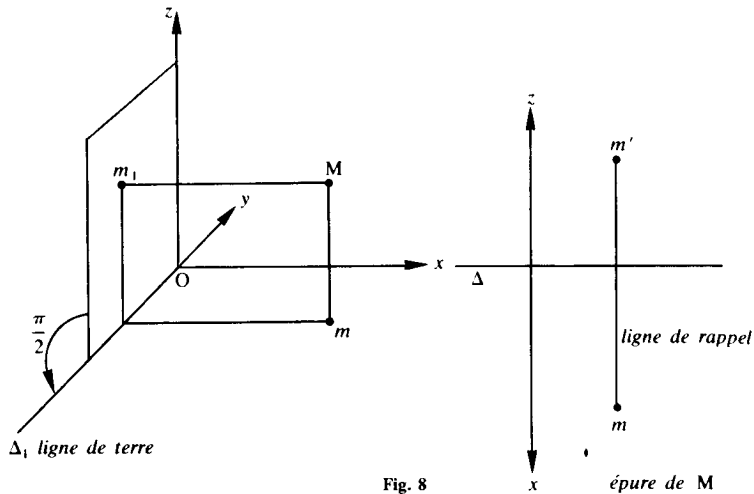


Fig. 8

version remaniée et élargie de ses notes de prison. Il y renoue avec les principes qui avaient imprégné l'œuvre de Desargues presque deux siècles plus tôt, tout en les explicitant et en les intégrant dans une remarquable synthèse des idées projectives. Dans son approche se reconnaissent tous les géomètres qui, à la suite de Monge et de Carnot, réagissent contre la trop forte emprise de la géométrie métrique, renforcée par l'emploi exclusif des méthodes analytiques.

Ces géomètres cherchent à donner à la géométrie synthétique une aussi grande généralité que celle qui caractérise la géométrie analytique. En effet, la géométrie synthétique raisonne sur les objets géométriques eux-mêmes et oblige à considérer plusieurs « cas de figure » pour tenir compte de toutes les positions respectives des données possibles. L'utilisation des coordonnées cartésiennes dispense d'une telle multiplication des cas.

Les deux points de vue, synthétique et analytique, auraient très bien pu se compléter, comme l'avait préconisé Monge, mais peu à peu ils en sont venus à s'opposer. Dans ses notes de prison, Poncelet avait utilisé les coordonnées, mais plus tard sa position s'est durcie; il rejette tout recours à la géométrie analytique et n'hésite pas à s'engager dans d'interminables polémiques avec les défenseurs de cette dernière.

Poncelet, le premier, considère la géométrie projective comme une branche autonome de la géométrie, avec ses méthodes spécifiques, ses résultats propres et ses objectifs bien définis.

Le principe de projection

Poncelet érige en méthode générale le principe de projection utilisé par Desargues pour étendre les propriétés du cercle aux coniques et mis en œuvre par Pascal dans la démonstration de son théorème sur l'hexagramme mystique.

Il conçoit que « d'un point donné pris pour centre de projection parte un faisceau de lignes droites dirigées vers tous les points d'une figure tracée sur un même plan; si l'on vient à couper ce faisceau de droites projetantes par un autre plan disposé d'une manière arbitraire dans l'espace, il en résultera, sur ce plan, une nouvelle figure, qui sera la projection de la première ». Chaque plan sécant du faisceau de droites projetantes fournira ainsi une projection de la figure initiale.

On peut également imaginer deux figures planes qui sont les projections à partir de deux centres distincts d'une même figure plane (cf. fig. 9).

Poncelet se pose le problème général de rechercher toutes les propriétés géométriques communes aux sections planes des diverses projections d'une figure.

Il envisage des transformations plus générales que celles par projection et par section : Si F et F' sont deux figures planes obtenues par deux sections d'une même projection (d'un même faisceau de droites projetantes) et si l'on projette les figures F et F' à partir d'un point quelconque sur un même plan, les figures résultantes sont appelées *figures homologiques*.

On peut aussi définir l'homologie comme une transformation d'un plan en lui-même dans lequel on a choisi un centre S et un axe s d'homologie. Aux

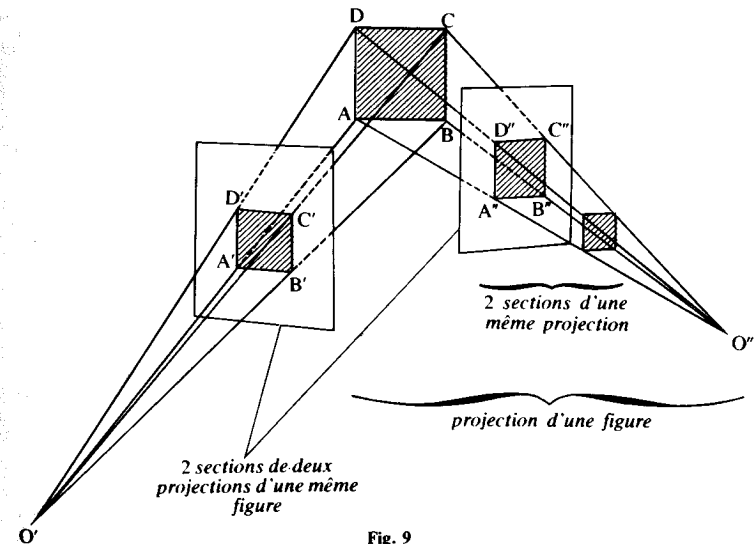


Fig. 9

points A, B, ... on fait correspondre des points A', B', ... tels que les droites AA', BB', ... passent par S et que les droites AB, ... et A'B', ... se coupent sur s (cf. fig. 5). Les triangles du théorème de Desargues sont des figures homologues car elles peuvent être transformées l'une dans l'autre par une homologie de centre S et d'axe s.

Poncelet considère également deux figures dont l'une peut être déduite de l'autre par un nombre fini de projections et de sections et s'interroge sur les propriétés communes aux deux figures.

Quelles sont ces propriétés « *indestructibles par l'effet de la projection* » qui intéressent tout particulièrement Poncelet? Il apparaît aussitôt que les longueurs et les angles ne sont pas conservés, mais que des points alignés restent alignés, que des droites concourantes restent concourantes, etc. Poncelet est ainsi amené à distinguer entre *propriétés métriques* liées aux notions euclidiennes de distance et d'angle, comme par exemple le théorème de Pythagore, et propriétés « *descriptives* », invariants par projection comme par exemple le théorème de Pascal. Pour l'étude de ces dernières, il suffit de les établir dans un cas où elles sont aisées à démontrer, puis de les étendre par projection au cas général.

Le principe de continuité

Il se peut qu'en appliquant le principe de projection pour passer d'une figure à une autre, quelques éléments de la figure puissent cesser d'être finis ou même d'exister. Ainsi, nous avons vu Desargues introduire un point fictif sur chaque droite, *le point à l'infini*, pour que droites parallèles et droites concourantes soient de même nature. Monge n'a pas hésité à dire, par exemple, que les tangentes à un cercle issues d'un point quelconque du plan sont *imaginaires* si le point est intérieur au cercle. Pour justifier l'introduction des éléments imaginaires, il a formulé un principe général, le « *principe des relations contingentes* », que Poncelet reprend sous le nom de « *principe de continuité* ». Il considère « *une figure quelconque dans une position générale* », puis il énonce : « *N'est-il pas évident que si, ..., on vient à faire varier la figure primitive par degrés insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations trouvées pour le premier système demeureront applicables aux états successifs de ce système, pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signe, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître a priori, et par des règles sûres ?* »

Poncelet n'a jamais ressenti le besoin de démontrer ce principe, qui lui semble intuitivement clair. A sa suite, les géomètres s'en sont amplement servi, tout en prenant quelques précautions. Mais l'adhésion à ce principe n'est pas générale, loin de là. Il est même très contesté au sein de l'Académie des sciences.

L'analyste A.-L. Cauchy lui reproche âprement son manque de fondement logique et lui reconnaît au plus une valeur heuristique. Dans le rapport qu'il a fait du *Traité* de Poncelet devant l'Académie, il dit : « *Ce*

principe n'est, à proprement parler, qu'une forte induction, à l'aide de laquelle on étend des théorèmes établis d'abord à la faveur de certaines restrictions, aux cas où ces mêmes restrictions n'existent plus. Étant appliqué aux courbes du second degré, il a conduit l'auteur à des résultats exacts. Néanmoins, nous pensons qu'il ne saurait être admis généralement et appliqué indistinctement à toutes sortes de questions en géométrie, ni même en analyse. »

Cauchy avait raison : le principe de Poncelet n'est valable que lorsque les propriétés en question peuvent se traduire analytiquement par une expression $f(a, b, c, \dots) = 0$, où f est une fonction algébrique, car alors une telle fonction est identiquement nulle lorsqu'elle s'annule en une petite partie de son domaine de définition.

Grâce au principe de continuité, Poncelet démontre des résultats portant sur des éléments infinis et imaginaires, sans qu'il les ait introduits explicitement. Il introduit les « *points cycliques* » : « *Des cercles placés arbitrairement sur un plan ne sont pas tout à fait indépendants entre eux, comme on pourrait le croire au premier abord, ils ont idéalement deux points imaginaires communs à l'infini.* » Il démontre que deux coniques réelles qui ne se coupent pas ont deux cordes imaginaires communes, de sorte qu'on puisse affirmer que deux coniques se coupent toujours en quatre points, soit réels, soit imaginaires. L'introduction systématique d'éléments fictifs (infinis ou imaginaires) permet ainsi de supprimer la distinction entre différents cas de figures et confère à la géométrie projective la généralité tant convoitée.

Le principe de dualité

Si le principe de projection permet à Poncelet de ramener les démonstrations générales à des cas particuliers de figures, le principe de dualité lui fournit un autre mode de démonstration simple. En effet, les géomètres avaient remarqué qu'en remplaçant « *point* » par « *droite* » et « *droite* » par « *point* » dans les théorèmes sur les figures planes, ils restaient cohérents et même vrais. Ils ignoraient totalement l'origine de ce phénomène. Poncelet fait le lien avec la relation entre pôles et polaires par rapport à une conique, qui établit effectivement une correspondance entre les points et les droites du plan. A un point P (le pôle) se trouve associée une droite (la polaire de P par rapport à la conique). Poncelet formule la transformation par polaires réciproques qui, à toute droite du plan, fait correspondre son pôle par rapport à la conique. Il développe cette idée en cherchant quelle est la transformée par polarité d'un hexagone, d'un polygone, puis finalement d'une courbe plane quelconque :

« *Si deux courbes quelconques, situées sur le plan d'une section conique donnée, sont telles que les points de l'une soient respectivement les pôles des tangentes de l'autre, réciproquement les points de celle-ci seront les pôles des tangentes de la première; de sorte que chacune d'elles pourra être considérée, à la fois, comme l'enveloppe des polaires des points de l'autre, ou comme le lieu des pôles des tangentes de cette autre.* »

Monge avait introduit, dans l'espace, la polarité par rapport à une quadrique en associant à un point le plan polaire (ensemble des points conjugués par rapport au pôle).

La transformation par polarité se fait toujours par rapport à une conique ou une quadrique. Gergonne, le bouillant éditeur des *Annales de mathématiques pures et appliquées*, soutient que le principe, plus général, est indépendant des coniques et des quadriques et s'applique à tous les énoncés et théorèmes ne contenant pas de propriétés métriques. Gergonne ne réussit cependant pas à le mettre sous une forme correcte et subit les attaques de Poncelet. L'essence du «*principe de dualité*» — le terme est de Gergonne — se précisera peu à peu dans les discussions entre Poncelet, Gergonne, Möbius, Chasles et Plücker.

Gergonne introduit l'écriture sur deux colonnes, le théorème dual se trouvant face au théorème primitif.

Propriété.

Une droite relie deux points.

Trois points sont alignés, c'est-à-dire sont situés sur une même droite.

Le triangle est formé par trois points non alignés et par trois droites qui le relie deux à deux.

Nous pouvons formuler maintenant le théorème dual du *théorème de Desargues*.

«*Si deux triangles sont tels que les droites qui relient les sommets correspondants passent par un point, alors les côtés correspondants se coupent en trois points alignés.*»

On remarque que le théorème dual du théorème de Desargues est sa réciproque.

En 1806 déjà, Ch.-J. Brianchon (1785-1864), élève de Monge, avait établi par polarité le dual du théorème de Pascal en montrant que le polaire réciproque par rapport à une conique d'un hexagone inscriptible dans une section conique sera un hexagone circonscriptible à une telle courbe, et vice-versa.

Théorème de Pascal :

«*Si un hexagone est inscrit dans une conique, les points d'intersection des côtés opposés sont alignés.*»

Propriété duale.

Un point relie deux droites, c'est-à-dire un point est l'intersection de deux droites.

Trois droites sont situées sur un même point, c'est-à-dire trois droites sont concourantes.

La figure duale est formée par trois droites non concourantes et par trois points d'intersection de droites prises deux à deux : c'est encore un triangle.

«*Si deux triangles sont tels que les points d'intersection des côtés correspondants sont alignés, alors les sommets correspondants sont reliés par trois droites concourantes.*»

Théorème de Brianchon :

«*Si un hexagone est circonscrit à une conique, les droites reliant les sommets opposés, c'est-à-dire les diagonales, sont concourantes.*» (Cf. fig. 10.)

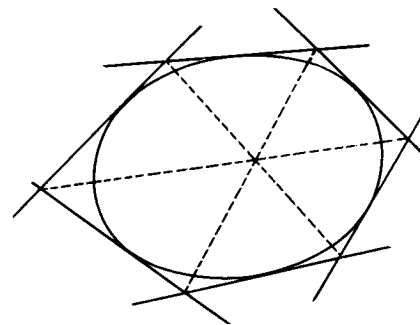


Fig. 10

Le lien entre dualité et polarité sera définitivement éclairci par Möbius (en 1827). La notion de dualité est indépendante des coniques, mais elle coïncide avec celle de polarité si cette dernière est valide.

L'influence de Poncelet

Grand ouvrage de synthèse, le *Traité des propriétés projectives des figures* fonde la géométrie projective sur quelques principes intuitivement simples, en déduit des méthodes élégantes et générales, systématise la notion d'élément à l'infini et effectue le passage à la géométrie projective complexe. Reçu comme un manifeste de la géométrie synthétique, le *Traité* séduit de nombreux géomètres.

Sous l'influence des idées de Poncelet, il s'est formé en Allemagne autour du journal de Crelle toute une école de géométrie projective qui se caractérise par l'étude des courbes et des surfaces algébriques.

Toujours à la recherche d'une plus grande généralité en géométrie, Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868) pourvoit les grandeurs géométriques — longueurs, angles, aires, volumes — de signes positif ou négatif et considère donc des grandeurs orientées. Il réintroduit la notion de bi-rapport de quatre points et en donne une théorie rigoureuse (devenue possible après l'introduction des signes en géométrie). Un système de quatre droites concourantes forme un ensemble harmonique si leurs points d'intersection avec une sécante constituent une division harmonique de points. Möbius et Julius Plücker (1801-1868) introduisent les coordonnées homogènes. Plücker (1834) considère un triangle fixe et choisit comme coordonnées (x_1, x_2, x_3) d'un point P dans le plan du triangle les longueurs algébriques des perpendiculaires abaissées de P sur les côtés du triangle, multipliées par des constantes arbitraires. Ces coordonnées ne sont pas uniques, seuls leurs rapports mutuels sont bien déterminés. Si (x, y) sont les coordonnées cartésiennes d'un point, $x = x_1/x_3$ et $y = x_2/x_3$. En coordonnées homogènes les équations des courbes sont homogènes.

En France, Michel Chasles (1793-1880), figure dominante dans la création géométrique du milieu du XIX^e siècle, retrouve indépendamment de nombreux résultats des géomètres allemands et les diffuse en France.

8. Les transformations géométriques

Dans l'œuvre de Poncelet, le poids est mis, pour la première fois, sur l'idée de transformation géométrique, qui jusqu'alors était à peu près absente des mathématiques.

Euclide utilisait les déplacements pour démontrer, par exemple, les cas d'égalité des triangles. Les cartographes du XVI^e siècle, sachant qu'il est impossible de projeter la sphère sur un plan tout en conservant les longueurs, cherchaient les applications conservant les angles. Enfin, les praticiens se servaient de la projection centrale pour représenter les corps dans un plan. Personne pourtant n'explicitait la notion de transformation. Elle affleurait dans la projection centrale de Desargues et dans la projection cylindrique de Monge : pour l'étude de certaines propriétés géométriques, ils substituaient à une figure de l'espace sa transformée plane.

Chez Poncelet, la transformation apparaît comme une correspondance entre figures de deux plans, qui transforme un point de la première en un point de la seconde (projections et homologie) ou un point de la première en une droite de la seconde (dualité).

Un peu plus tard, Möbius et indépendamment Chasles définissent les transformations projectives les plus générales, que Chasles désigne par le terme d'« *homographie* », comme transformations d'un plan dans un autre qui transforment les points en points, les droites en droites et qui conservent le bi-rapport. Möbius montre que cette dernière condition découle des premières : si A', B', C', D' sont les transformés projectifs d'un système de quatre points alignés, alors $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$. Chasles comme Möbius indiquent qu'analytiquement les transformations projectives se traduisent par des substitutions linéaires inversibles sur les coordonnées homogènes (cf. encadré 9).

Chasles appelle « *corrélation* » la transformation plane qui à des points fait correspondre des droites et inversement.

La conception de Möbius d'une transformation ponctuelle entre deux plans est très claire. Il crée la notion d'« *affinités géométriques* » (*Verwandschaften*) pour décrire différents types de transformations : selon que figures initiales et figures transformées sont égales ou semblables, il distingue entre *déplacements* et *similitudes*. Euler avait déjà étudié les déplacements et avait démontré, en substance, qu'un déplacement plan est une rotation, une translation ou une translation suivie d'une symétrie. Möbius reprend le terme d'Euler de « *transformation affine* » pour désigner la transformation qui conserve le parallélisme sans conserver la distance. La transformation la plus générale étudiée par Möbius est l'homographie, que Möbius appelle « *collinéation* » (cf. encadré 9).

Il remarque qu'on peut étudier les propriétés invariantes par chaque type de transformation. Felix Klein voit dans les « *affinités géométriques* » une notion équivalente à celle de groupe et voit en Möbius un précurseur du programme d'Erlangen.

9. Transformations projectives et affines

Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ sont les coordonnées homogènes d'un point du plan projectif,

$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$ celles de son image par une transformation projective, alors

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

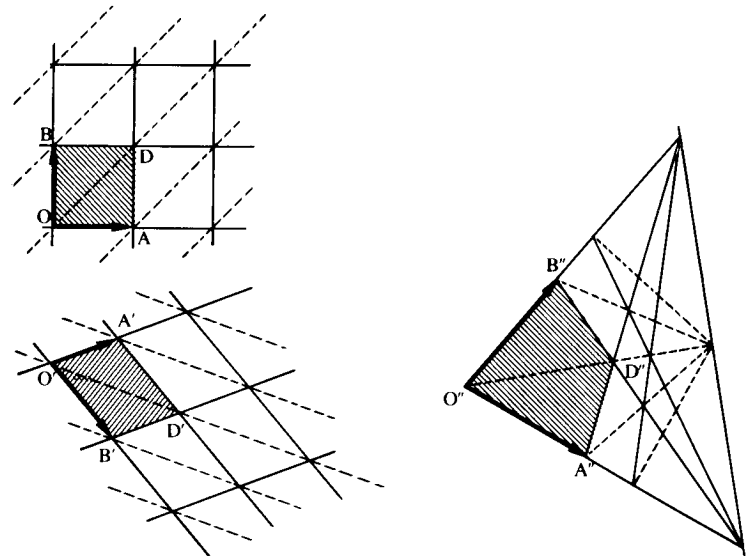
avec une condition sur les coefficients a_{ij} qui exprime que la transformation est inversible.

De manière condensée, on peut écrire $x' = Ax$, où

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ matrice de déterminant non nul.}$$

Les transformations affines s'expriment analytiquement par $x' = A'x$ où A' est la matrice ci-dessus avec $a_{31} = a_{32} = 0$.

Exemples d'une transformation affine qui transforme le carré OADB en un parallélogramme O'A'D'B' et d'une transformation projective qui transforme OADB en un quadrilatère O''A''D''B'' :



9. Les coordonnées projectives de von Staudt

Au sein de l'école allemande, le fossé se creuse rapidement entre les géomètres, qui privilégient la forme et veulent créer une géométrie purement descriptive, et les analystes, qui favorisent les méthodes algébriques. Les représentants les plus intransigeants de la première tendance sont Steiner et von Staudt, tandis que Möbius et Plücker refusent de bannir les coordonnées de la géométrie projective. La volonté de créer une géométrie « pure », exempte de méthodes analytiques, indépendante de toute métrique, culmine dans la tentative par Christian von Staudt (1798-1867) de définir des coordonnées projectives. En effet, le bi-rapport, un des concepts les plus importants de la géométrie projective, était défini en termes de longueur, notion métrique par excellence. Von Staudt décide de libérer la géométrie projective de toute considération métrique en introduisant une mesure projective des longueurs². Pour bien prendre ses distances avec la géométrie métrique, il débaptise le bi-rapport pour l'appeler « jet » (*Wurf*). Si M est un point quelconque du plan, la coordonnée de M sera le jet que forme M avec trois autres points 0, 1, ∞ choisis arbitrairement sur une droite passant par M.

Il s'inspire d'une construction de Möbius n'utilisant que des points et des droites pour porter une échelle projective sur la droite. Le point à l'infini appartient à la droite à l'infini, qui est une droite « normale » en géométrie projective (cf. fig. 11).

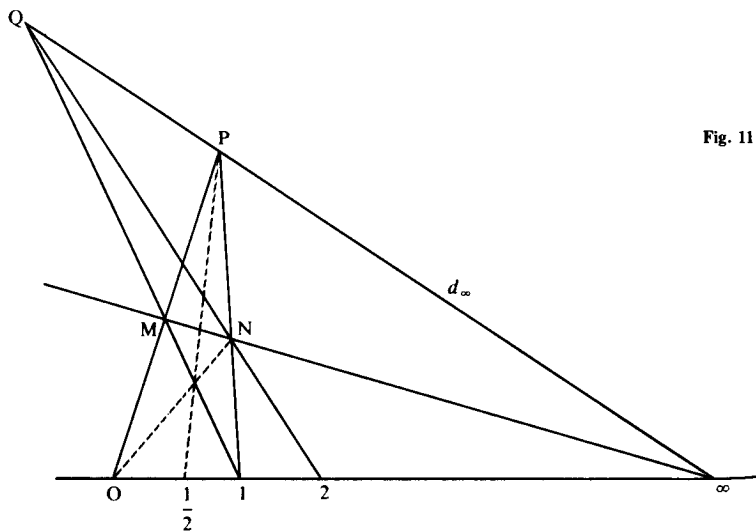


Fig. 11

2. Dans *Geometrie der Lage* (Géométrie de position), 1847.

On commence par tracer une parallèle à O1 passant par M. Or deux droites parallèles se coupent au point à l'infini et on trace la droite $M\infty$. Après avoir prolongé OM jusqu'à ce qu'elle coupe la droite à l'infini en P, on trace IP, parallèle à OM passant par I; les deux parallèles doivent se rencontrer sur la droite à l'infini. De même, on prolonge IM jusqu'à ce qu'elle coupe la droite à l'infini en Q et on trace la parallèle QN à IM passant par N. Cette dernière coupe la base $O\infty$ en un point auquel on attachera le symbole 2.

Cette construction de von Staudt permet d'obtenir toutes les valeurs rationnelles de la coordonnée x . Quant à la correspondance entre nombres irrationnels et points de la droite, elle est aussi problématique qu'en géométrie euclidienne et nécessite un axiome de continuité. La géométrie projective ne réussit pas à éviter cet écueil et la tentative de von Staudt relance les discussions sur la nature des irrationnels, sur la mesure et le lien entre grandeurs géométriques et nombres.

L'« algèbre des jets » de von Staudt permet de construire la géométrie projective indépendamment de la notion de distance. Ses concepts reposent sur les propriétés qualitatives et descriptives des figures géométriques et sont logiquement antérieurs à ceux de la géométrie euclidienne fondés sur la mesure des longueurs et des angles. Signalons cependant une faiblesse logique dans la construction de von Staudt : elle utilise l'axiome des parallèles de la géométrie euclidienne (alors que le parallélisme n'est pas un invariant projectif).

10. Formulations analytiques

Parallèlement à cet effort de fondement de la géométrie projective se poursuit en Allemagne le développement des méthodes analytiques. Möbius et Plücker ont introduit les coordonnées homogènes, qui permettent de formuler analytiquement les principes de la géométrie projective et les propriétés qui en découlent.

Coordonnées homogènes

Ainsi, Plücker écrit l'équation en coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) de la droite à l'infini : $x_3 = 0$. Les points du plan euclidien en position finie peuvent être repérés par les coordonnées $x = x_1/x_3$ et $y = x_2/x_3$. Les points ayant la troisième coordonnée $x_3 = 0$ sont donc situés sur la droite à l'infini.

Pour obtenir l'équation des points cycliques, il suffit de calculer les points d'intersection d'un cercle avec la droite à l'infini. En coordonnées cartésiennes, l'équation du cercle de centre (a, b) et de rayon R s'écrit :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2;$$

en coordonnées homogènes :

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = R^2x_3^2.$$

L'intersection du cercle avec la droite à l'infini est représentée par $x_1^2 + x_2^2 = 0$ et $x_3 = 0$. Elle est donc formée de deux points de coordonnées respectives $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$ où $i^2 = -1$

La droite passant par un point (x_1, y_1, z_1) et par le point $(1, i, 0)$ peut être représentée analytiquement par l'équation : $(x - x_0) + i(y - y_0) = 0$ avec $x_0 = x_1/z_1$, $y_0 = y_1/z_1$; de même celle passant par (x_1, y_1, z_1) et $(1, -i, 0)$ est donnée par l'équation : $(x - x_0) - i(y - y_0) = 0$. Ces deux droites possèdent la particularité d'être perpendiculaires à elles-mêmes. Le coefficient angulaire de la perpendiculaire à la première, étant $-\frac{1}{i}$ est égal à celui de la droite. Sophus Lie parle en riant de « *droites folles* ». On les appelle *droites isotropes*.

Julius Plücker se situe dans la tradition de Monge et vise à reconstruire la géométrie projective en utilisant conjointement constructions géométriques et formules analytiques. Il propose une approche analytique du principe de dualité de Gergonne-Poncelet.

Coordonnées tangentielles

L'équation d'une droite en coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) s'écrit (1) $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, où u_1, u_2, u_3 sont trois constantes. Pour chaque système de valeurs des coefficients u_1, u_2 et u_3 , l'équation (1) représente une droite. Ainsi, en faisant parcourir u_1, u_2, u_3 toutes les valeurs possibles, l'équation (1) représente toutes les droites possibles.

Lorsque les u_1, u_2, u_3 sont liés par une relation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ où a, b et c désignent trois nouvelles constantes, l'équation (1) représente encore une infinité de droites, mais elles passent toutes par le point de coordonnées (a, b, c) .

Considérant u_1, u_2, u_3 comme variables, Plücker identifie ce faisceau de droites passant par un point au point d'intersection et dit que l'équation (2) $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ représente un point. A chaque système de valeurs de u_1, u_2 et u_3 correspond une droite passant par le point $P(a, b, c)$. Plücker appelle les (u_1, u_2, u_3) « *coordonnées tangentielles* » de cette droite. Les coordonnées tangentielles de la droite $3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$ ($3x - 2y + 2 = 0$ en coordonnées cartésiennes) sont $(3, -2, 2)$.

L'équation $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ étant symétrique par rapport aux coefficients u_i et par rapport aux coordonnées x_i , on peut l'interpréter comme « *lieu géométrique d'une infinité de points* » lorsque les coordonnées sont variables ou comme « *un lieu géométrique qui est l'intersection d'une infinité de droites* » lorsque les coefficients sont variables.

Si l'on remplace l'équation (2) par une équation homogène quelconque, soit (3) $f(u_1, u_2, u_3) = 0$, à chaque valeur de (u_1, u_2, u_3) vérifiant (3) correspondra une droite. « *Nous obtiendrons une infinité de telles droites qui se suivent immédiatement et enveloppent ainsi une courbe continue. Nous disons que cette courbe est représentée par l'équation (3).* » Et « *on voit aisément comment les procédés de démonstration vont doubler en géométrie des courbes, comment, à chaque développement reposant sur l'équation habituelle, correspond une autre reposant sur l'équation nouvelle* ». Plücker reconnaît le lien avec la théorie des polaires réciproques et plus généralement avec le principe de dualité.

L'équation (3) représente une courbe lorsqu'on interprète les

(u_1, u_2, u_3) comme coordonnées homogènes; elle représente la courbe *duale* (ou polaire) lorsque (u_1, u_2, u_3) sont des coordonnées tangentielles.

L'équation d'une droite (1) ou d'un plan étant symétrique par rapport aux deux interprétations, on peut remplacer « droite » ou « plan » par « point » dans tous les théorèmes énonçant des propriétés reliant droites ou plans et points.

Plücker applique ces idées nouvelles à la géométrie des courbes linéaires et quadratiques, s'attaque à l'étude des courbes de degré trois et quatre (que Poncelet avait dû abandonner, faute de pouvoir vaincre les difficultés) et fait la première tentative réussie d'une théorie générale des courbes planes algébriques.

11. Les géométries non euclidiennes

Pendant que la géométrie projective se développe et crée, conjointement avec la géométrie analytique, des outils nouveaux pour l'étude des courbes et des surfaces algébriques, on assiste dans la première moitié du XIX^e siècle à la naissance d'une nouvelle géométrie qui se pose comme une alternative à la géométrie euclidienne.

La théorie des parallèles

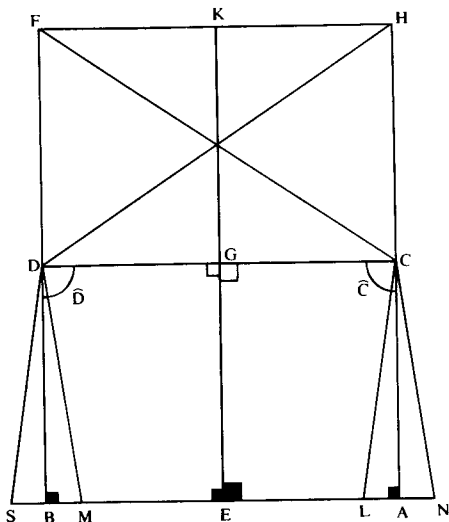
Son histoire débute pratiquement avec celle de la géométrie euclidienne, au III^e siècle avant J.-C., avec les *Éléments* d'Euclide. Elle a son origine dans les tentatives répétées de clarifier le statut du 5^e postulat d'Euclide, le postulat des parallèles : « *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée* », dans la formulation de J. Playfair au XVIII^e siècle, équivalente à celle d'Euclide (cf. chapitre 2, page 56).

Depuis l'Antiquité grecque jusqu'à 1800 environ, deux démarches différentes peuvent être décrites : la première tente de remplacer l'axiome des parallèles par un autre plus simple et plus intuitif. La seconde vise à en faire un simple théorème en le déduisant des quatre premiers axiomes. Les essais de démonstration sont nombreux, mais tous ceux qui croyaient avoir proposé une preuve ont implicitement utilisé un axiome équivalent à celui d'Euclide.

Les mathématiciens de l'Islam, d'Al-Gauhari (début du IX^e siècle) à As-Samarkandi (deuxième moitié du XIII^e siècle) se sont beaucoup intéressés à la théorie des parallèles. Thabit ibn Qurra et surtout Ibn Al-Haytham, Al-Khayyam et Al-Tusi ont ouvert la voie qui débouchera au XIX^e siècle sur la construction des géométries non euclidiennes. Ils reconnaissent le lien entre le postulat des parallèles et la somme des angles du quadrilatère et, par conséquent, du triangle.

Omar Al-Khayyam remplace le postulat des parallèles par le principe suivant : « *Deux droites concourantes* (c'est-à-dire qui se rapprochent) *se coupent et il est impossible qu'elles s'écartent l'une de l'autre dans la direction*

Démonstration de $\widehat{C} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2}$.



Al-Khayyam élève la perpendiculaire EG au milieu de la base inférieure et montre qu'elle est aussi perpendiculaire à la base supérieure et qu'elle la divise en deux parties égales.

Il la prolonge jusqu'à un point K tel que $GK = EG$.

Il prolonge les côtés AC et BD.

Il trace FH perpendiculaire à EK, où F et H sont les points d'intersection de la perpendiculaire avec les côtés AC et BD prolongés.

Dans le quadrilatère CDFH, les diagonales sont égales.

Il plie la figure le long de la droite CD :

si les angles $\widehat{C} = \widehat{D}$ sont aigus (hypothèse 1), le segment HF devient le segment SN, qui est plus grand que AB;

si $\widehat{C} = \widehat{D}$ sont obtus (hypothèse 2), HF vient en LM plus petit que AB.

Il rabat ensuite la totalité de la figure autour de AB.

— Dans l'hypothèse de l'angle aigu, deux perpendiculaires à AB, BF et AH sont concourantes.

— Dans l'hypothèse de l'angle obtus, ces deux perpendiculaires doivent s'écarter des deux côtés de AB.

Or deux perpendiculaires à une droite sont équidistantes et les deux premières hypothèses conduisent à une contradiction.

où elles concourent³. » Il en découle que deux perpendiculaires à une droite sont équidistantes.

Al-Khayyam considère le quadrilatère dit de Saccheri — Girolamo Saccheri étant un jésuite du XVII^e siècle — formé d'une droite donnée AB aux extrémités de laquelle on élève les perpendiculaires égales AC et BD et de la droite CD. Il démontre d'abord l'égalité, déjà établie par Ibn Qurra, des deux angles supérieurs du quadrilatère. Puis il établit trois hypothèses, à savoir : « 1) les angles supérieurs du quadrilatère sont aigus; 2) les angles supérieurs sont obtus; 3) les angles supérieurs sont droits ». Il utilise la propriété ci-dessus pour démontrer que les hypothèses 1) et 2) conduisent à une contradiction (cf. encadré 10). Seule l'hypothèse de l'angle droit doit être retenue.

L'idée de démontrer le postulat des parallèles par l'absurde s'est révélée féconde; elle permet d'envisager les deux hypothèses que comprend sa négation, et d'en déduire des propositions qui sont déjà des théorèmes de géométrie non euclidienne.

Au XVII^e siècle, John Wallis puis G. Saccheri s'inspireront des travaux arabes. Dans l'hypothèse de l'angle aigu, Saccheri n'arrive pas à une contradiction, mais les théorèmes qu'il obtient lui semblent si répugnants qu'il les rejette.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) propose de nombreuses démonstrations du postulat et obtient quelques nouveaux résultats : « Si la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, alors elle vaut la même chose dans tout autre triangle, et le cinquième postulat d'Euclide est vrai. »

La prochaine étape est franchie dans les travaux de Jean-Henri Lambert (1766). S'appuyant sur ceux de Saccheri, il ne conclut pas comme ce dernier à une contradiction (dans l'hypothèse de l'angle aigu), mais se sent devant une déduction ouverte. Il comprend qu'il est possible de construire des géométries logiquement cohérentes sur les deux hypothèses de l'angle aigu et de l'angle obtus.

Les créateurs : Gauss, Bolyai et Lobatchevski

Au tournant du siècle, un petit nombre d'hommes sont parvenus à la conviction que le postulat des parallèles est indémontrable et entrevoient la possibilité de déduire un corps de théorèmes du système d'axiomes euclidien dans lequel on aurait remplacé le 5^e postulat par sa négation. Mais ils refusent à ces nouvelles géométries toute faculté de décrire l'espace physique; tout au plus peuvent-elles correspondre aux espaces stellaires, d'où le nom de *géométrie astrale* que certains ont pu donner à la géométrie non euclidienne. Pour mieux comprendre ce refus, il nous faut rapidement examiner le statut de la géométrie euclidienne. Jusqu'en 1800, celle-ci était censée rendre compte du monde sensible. Ses théorèmes, lemmes et corollaires — reflats idéaux de propriétés réelles — étaient considérés comme absolument vrais. Le dogme de la structure euclidienne de l'espace était encore renforcé par les

3. Commentaire sur les postulats problématiques du livre d'Euclide.

thèses du philosophe allemand I. Kant (1724-1804), qui régnaient alors sans partage. Il fait de l'espace euclidien un *a-priori* antérieur à toute expérience.

C.F. Gauss (1777-1855), figure de transition, savant du XVIII^e siècle par la forme classique de ses Mémoires, par l'universalité de ses préoccupations et par sa conception globale de la science, mathématicien du XIX^e siècle par la nouveauté et l'audace de ses idées, a su se libérer du point de vue kantien. Il reconnaît, le premier, à la géométrie non euclidienne le droit de représenter l'espace physique au même titre que celle d'Euclide.

Dès 1792, Gauss s'intéresse à la théorie des parallèles. Nous savons, par sa correspondance et ses papiers personnels, qu'à partir de 1813 Gauss développe cette « étrange géométrie, tout à fait différente de la nôtre (...) entièrement conséquente en elle-même ». Gauss n'a rien publié sur le sujet. « J'appréhende les clameurs des Béotiens si je voulais exprimer complètement mes vues », écrit-il à son ami Bessel (1829). Ses vues ont sûrement influencé son Mémoire sur la théorie des surfaces, où apparaît pour la première fois la possibilité d'introduire différentes géométries sur une même surface.

Gauss pensait que l'expérience peut déterminer la géométrie la mieux adaptée au monde réel. Ses travaux en géodésie sont d'ailleurs centrés sur l'expression de la somme des angles d'un triangle formé par trois géodésiques, plus courts chemins entre deux points sur une surface. Il a mesuré sur le terrain les angles d'un triangle dessiné par trois sommets de montagnes. Si cette somme vaut deux droits, la géométrie sera euclidienne. Le résultat trouvé dépassa π de 14" 85 et restait à l'intérieur de la marge d'erreur.

Nikolai Ivanovich Lobatchevski (1793-1856), professeur à l'université de Kazan, et Janos Bolyai (1802-1860), officier hongrois, sont généralement désignés comme coinventeurs de la géométrie non euclidienne. Ignorant tout des recherches de l'autre, chacun d'eux a élaboré, vers 1825, une conception identique à celle de Gauss. Contrairement à celui-ci, ils ont tenté de la diffuser et on leur doit les premiers exposés systématiques de la géométrie qui repose sur l'hypothèse de l'angle aigu et que Klein a qualifié d'hyperbolique. La première publication de Lobatchevski, datée de 1826, aujourd'hui perdue, est suivie (à partir de 1829-1830) de nombreuses autres en russe, en français et en allemand. Bolyai a présenté ses résultats dans une annexe à un ouvrage de son père sous le titre de *Science absolue de l'espace* (1832-1833).

La géométrie « imaginaire » de Lobatchevski

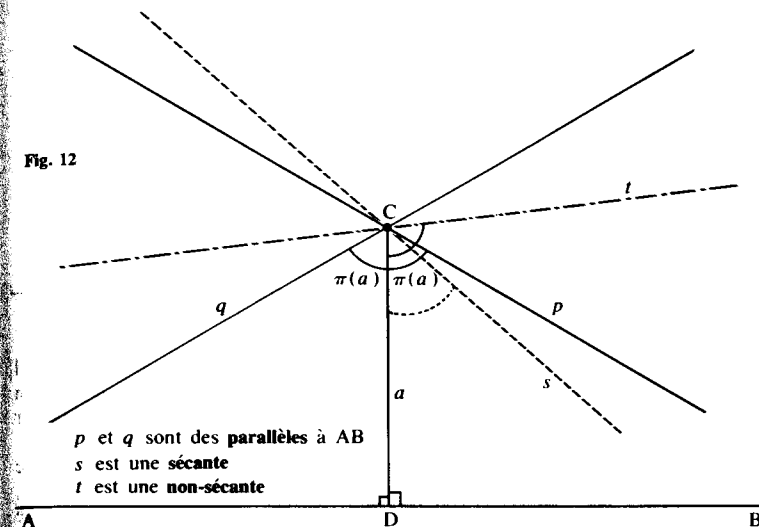
Lobatchevski commence par démontrer les théorèmes euclidiens qui ne reposent pas sur le postulat des parallèles. Puis il remplace celui-ci par la propriété suivante, déjà présente chez Saccheri : « Par une droite AB et un point C donnés, toutes les droites de ce plan passant par C peuvent être partagées en deux classes par rapport à AB : celle des droites qui coupent AB et celle des droites qui ne coupent pas AB. » (Cf. fig. 12.)

Dans la seconde classe, il existe deux droites *p* et *q* appelées « droites parallèles » qui forment la frontière entre les deux classes, c'est-à-dire qu'il existe un angle $\pi(a)$, que Lobatchevski appelle « angle de parallélisme », qui dépend de la distance *a* du point C de la droite AB et qui a la propriété

suivante : toutes les droites passant par C et formant avec la perpendiculaire CD un angle inférieur à $\pi(a)$ coupent AB; toutes les autres droites passant par C ne couperont pas AB. Ces dernières, qui au sens euclidien seraient parallèles à AB, sont appelées « non sécantes ». Il en passe une infinité par C.

Dans le cas particulier où l'angle $\pi(a)$ vaut un droit, on retrouve le postulat d'Euclide. L'angle $\pi(a)$ croît et approche l'angle droit lorsque le

Fig. 12



point C s'approche de la droite AB; $\pi(a)$, décroît et tend vers zéro lorsque *a* tend vers l'infini. Lobatchevski établit dans la suite de nombreux théorèmes dont nous citerons les suivants : « La somme des angles d'un triangle est toujours inférieure à deux droits; elle décroît lorsque l'aire du triangle croît et approche deux droits lorsque l'aire tend vers zéro. Deux triangles semblables sont égaux. » (Cf. encadré 11.)

La géométrie riemannienne

La géométrie non euclidienne déduite de l'hypothèse de l'angle obtus a été exploitée par un élève de Gauss, Bernhard Riemann (1826-1866), dans un célèbre mémoire écrit à l'occasion de son admission à la faculté de philosophie de Göttingen (1854) et intitulé *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* (publié en 1867).

Adoptant le point de vue local de la géométrie différentielle, Riemann a pu se placer dans un cadre beaucoup plus général. Pour le décrire, nous devons brièvement revenir aux *Recherches générales sur les surfaces courbes* (1827) de Gauss. La conception de la géométrie intrinsèque d'une surface y

11. Géométries euclidienne et non euclidiennes

Géométrie	Terminologie de Klein	Quadrilatère de Saccheri	Nombre de parallèles par un point à une droite donnée	Somme des angles d'un triangle
Euclide	géométrie parabolique	hypothèse de l'angle droit	une parallèle	π
Gauss-Bolyai-Lobatchevski	géométrie hyperbolique	hypothèse de l'angle aigu	une infinité de parallèles	inférieur à π
Riemann	géométrie elliptique	hypothèse de l'angle obtus	pas de parallèles	supérieur à π

est développée. Gauss fait abstraction des propriétés de l'espace dans lequel la surface est plongée. Plutôt que de l'ancrer en un point de l'espace par un système de coordonnées (x, y, z) , il introduit des coordonnées curvilignes sur la surface, à l'image des latitudes et des longitudes sur la sphère.

Plus précisément, si dans les équations paramétriques de la surface $x = x(p, q)$, $y = y(p, q)$, $z = z(p, q)$, on garde p (respectivement q) fixe, on obtient deux familles de courbes paramétriques sur la surface; chaque point, se trouvant à l'intersection de deux courbes de paramètres respectifs p et q peut être représenté par le couple de valeurs (p, q) .

Gauss introduit la distance de deux points de la surface de la manière suivante : Si (x, y, z) sont les coordonnées d'un point, $(x + dx, y + dy, z + dz)$ celles d'un point infiniment voisin du premier, alors, par définition, le carré de la distance de ces deux points sera une forme quadratique $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Gauss essaie de l'exprimer en coordonnées curvilignes; ainsi $ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$, où E, F et G sont des fonctions de p et de q .

S'interrogeant sur les propriétés de la surface indépendantes du choix des coordonnées curvilignes, Gauss démontre que les propriétés géométriques de la surface — distances, angles, courbure — ne dépendent que des fonctions E, F et G (cf. encadré 12). Il en conclut qu'il suffit de se donner une forme quadratique ds^2 sur une surface pour en déduire toutes ses propriétés : « ... pour trouver la mesure de la courbure, on n'a pas besoin de formules finies donnant les coordonnées x, y, z en fonction des indéterminées p et q , mais il suffit d'avoir l'expression générale de la grandeur de chaque élément linéaire » (que l'on note ds).

Cette manière de considérer la surface comme un espace en soi permet de définir plusieurs géométries sur une même surface, puisque c'est la donnée d'un élément linéaire ds , c'est-à-dire celle de trois fonctions arbitraires E, F et

G des coordonnées curvilignes (p, q) , qui détermine les propriétés géométriques sur la surface.

Le travail de Riemann renoue avec l'étude intrinsèque des surfaces courbes, mais d'emblée il s'affranchit de la nécessité de l'espace à trois dimensions, que Gauss considérait déjà comme une infirmité de l'esprit humain. Riemann étudie des grandeurs à dimensions multiples, les *multiplicités*, ensembles de toutes les valeurs possibles de n paramètres variables x_1, x_2, \dots, x_n , appelés coordonnées. Il y introduit une forme quadratique, polynôme homogène de degré deux à n variables dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$ds^2 = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} dx_i dx_k = a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + \dots + a_{nn} dx_n^2.$$

Cette forme ds^2 , qui n'est qu'une généralisation de l'élément linéaire des surfaces de Gauss, définit une mesure de la distance entre deux points dont les coordonnées diffèrent de quantités infinitésimales. Comme les coefficients a_{ik} sont des fonctions du lieu, la métrique (et la nature de la géométrie qui en dépend) peut varier d'un point à l'autre de la multiplicité. Un disque inégalement chauffé sur lequel on aurait placé des bâtonnets en métal, qui se dilatent sous l'effet de la chaleur, est un exemple d'une surface sur laquelle les longueurs dépendent des lieux.

Riemann décrit comment mesurer la courbure d'une multiplicité puis s'intéresse plus particulièrement aux multiplicités à courbure constante, dans

12. La courbure

La courbure d'une courbe en un point P

Considérer une normale à la courbe au point P, puis la garder fixe. La normale en un point voisin s'en approche progressivement et leur point d'intersection atteint une position limite W sur la normale fixe, qu'on appelle le *centre de courbure* de la courbe en P. La distance entre P et W est le *rayon de courbure* R au point P. La courbure k de la courbe en P est alors par définition égale à $1/R$.

Exemples : la courbure du cercle est $1/R$;
la courbure de la droite est 0 (W est rejeté à l'infini).

La courbure d'une surface en un point p

Considérer les rayons de courbure de diverses sections de la surface en P par des plans normaux passant par P. Ceux-ci varient entre deux rayons extrêmes R_1 et R_2 appelés *rayons de courbure principaux* en P.

La courbure k de la surface en P est alors par définition égale à $1/(R_1 \cdot R_2)$.

Exemples : la courbure du cylindre de révolution dont les cercles-parallèles sont de rayon R est $\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\infty} = 0$.

lesquelles on peut déplacer les figures sans qu'aucun changement de forme ou de taille n'en résulte.

La géométrie euclidienne et la géométrie de Gauss-Bolyai-Lobatchevski, qui correspondent respectivement à une courbure nulle et négative, apparaissent ainsi comme des cas particuliers de la géométrie riemannienne plus générale. Mais quelle est alors la nature d'une multiplicité à courbure positive constante? Riemann montre qu'en dimension deux, les surfaces à courbure positive s'appliquent sur une sphère. On peut y développer une géométrie sans parallèles.

On peut donc «réaliser» un espace à courbure positive constante à deux dimensions sur une sphère si on identifie sa surface à un plan, les grands cercles aux «droites» et les couples de points diamétralement opposés aux «points».

En 1866, Eugenio Beltrami (1835-1900) montre que la géométrie d'une portion limitée du plan hyperbolique est applicable à la pseudosphère, surface de révolution à courbure négative constante sous condition d'identifier les «droites» aux géodésiques de la surface (cf. fig. 13).

Ces modèles euclidiens pourvoient les géométries elliptique et hyperbolique d'un support intuitif et accélèrent leur acceptation générale par la communauté mathématique.

Une nouvelle conception de l'espace

La géométrie euclidienne est essentiellement l'étude des figures du plan et de l'espace. Le rôle de ce dernier se limite à celui d'une étendue indéfinie et neutre, un réceptacle dans lequel sont plongés les corps.

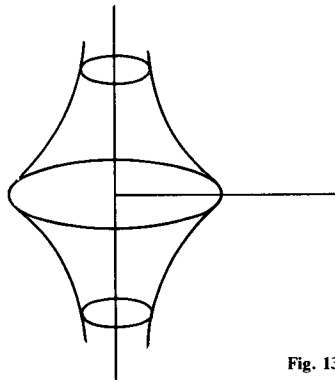


Fig. 13

Si la construction d'Euclide prend appui sur l'intuition et l'observation, elle repose aussi sur des « hypothèses », les postulats d'Euclide. Pendant deux mille ans, on avait occulté ce côté hypothétique et, nous l'avons dit, la structure euclidienne du monde réel avait été élevée en dogme.

On imagine aisément « l'étrange dédoublement de la personnalité géométrique » — pour reprendre les termes de G. Bachelard — qui s'est effectué au cours du XIX^e siècle lorsque Gauss, Bolyai, Lobatchevski et Riemann construisent, indépendamment de l'expérience, des géométries logiquement cohérentes qui ne sont pas euclidiennes. La vérité absolue de cette dernière est sérieusement ébranlée, le lien entre le monde réel et les objets mathématiques remis en question. Comme le dit J. Dieudonné : « *Le point de vue un peu naïf suivant lequel les objets mathématiques n'étaient que les « Idées » (au sens platonicien) des objets sensibles devenait intenable, et allait peu à peu faire place à une plus nette compréhension de la complexité beaucoup plus grande de la question, où il nous semble aujourd'hui que mathématique et réalité sont presque complètement indépendantes, et leurs contacts plus mystérieux que jamais.* »

Devant la variété de géométries possibles, Riemann, comme Gauss, pense que le débat entre les diverses géométries peut être tranché par l'expérience. Il écrit :

« *Une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience...* »

Riemann est le premier à faire de la nature de l'espace l'objet même de son interrogation. Il reconnaît dans l'espace physique une variété à trois dimensions, amorphe, formée seulement par son contenu matériel, qui détermine également sa métrique. Si les corps sont indépendants des lieux, la courbure de l'espace doit être constante. Mais cette courbure constante n'est plus nécessaire lorsqu'on fait dépendre la métrique de la répartition de la matière. Le corps entraîne le champ métrique qu'il engendre : il y a interaction entre l'espace et les corps qui y sont plongés.

La théorie de la relativité générale a donné raison à cette conception. Le monde est un continu à quatre dimensions, régi par un champ métrique dépendant de l'état, de la répartition et du mouvement de la matière, représenté par une forme quadratique ds^2 .

12. Interprétation projective des notions métriques

Poncelet puis Chasles avaient explicitement distingué entre propriétés « descriptives » et propriétés métriques. Von Staudt s'était proposé d'asseoir la géométrie projective sur des fondements indépendants de la notion de distance, mais le lien entre géométries projective et métrique n'avait toujours pas été précisé.

En 1853, le mathématicien français Edmond Laguerre (1834-1886) tente de mettre la mesure des angles sur des bases purement projectives. Il ramène la mesure d'un angle Φ au bi-rapport de ses côtés et des deux droites isotropes de même origine.

Deux droites u et u' qui se coupent à l'origine forment entre elles un angle Φ . Si elles forment avec l'axe des x positifs des angles respectifs θ et θ' , elles auront comme équations en coordonnées cartésiennes respectivement $y = x \cdot \operatorname{tg} \theta$ et $y = x \cdot \operatorname{tg} \theta'$. Si v et v' sont les droites isotropes qui lient l'origine aux points cycliques d'équations respectives $y = ix$ et $y = -ix$, alors, d'après Laguerre, l'angle $\Phi = \theta' - \theta = \frac{i}{2} \log(v, v', u, u')$, où (v, v', u, u') est le bi-rapport de quatre droites concourantes.

L'algébriste anglais A. Cayley élabore indépendamment une mesure projective des longueurs et des angles qui généralise celle de Laguerre. Interprétant les points cycliques comme une conique dégénérée, il les remplace par une conique quelconque du plan, qu'il nomme « *absolu* » (on dira aussi *fondamental*) et obtient une métrique générale qui contient la métrique euclidienne. Il affirme que les propriétés métriques d'une figure F sont les propriétés projectives de la figure F' formée de F et de l'*absolu*.

Le point de départ de Cayley est un Mémoire sur les formes (le sixième, de 1859), qui sont des polynômes homogènes en deux, trois, etc., variables. Comme Gauss et Riemann, il introduit une mesure de la distance en définissant une forme quadratique dans le plan projectif. En coordonnées homogènes $x = (x_1, x_2, x_3)$, elle s'écrit :

$$q(x) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1x_2 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_2x_3;$$

$$q_0(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

est un exemple d'une telle forme quadratique. Elle vérifie la condition $q(kx) = k^2q(x)$, où k est un nombre réel. On peut lui associer une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$F(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

Ayant encore $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$F(x, y) = Ax_1y_1 + Bx_2y_2 + Cx_3y_3 + D(x_1y_2 + x_2y_1) + E(x_1y_3 + x_3y_1) + G(x_2y_3 + x_3y_2)$$

et

$$F(x, x) = q(x).$$

Dans notre exemple $F_0(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.

Or $F(x, x) = 0$ définit une conique, l'*absolu* de Cayley. Ainsi, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ est l'équation en coordonnées homogènes d'un cercle de rayon 1 dont le centre est à l'origine. Cayley calcule la distance entre les deux points x et y à l'aide de la formule :

$$\delta = \operatorname{arc} \cos \frac{F(x, y)}{\sqrt{F(x, x) \cdot F(y, y)}}.$$

Dans l'exemple ci-dessus

$$\delta = \operatorname{arc} \cos \frac{x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - y_3^2}}.$$

De manière analogue, Cayley établit la formule duale pour la mesure projective des angles, distances entre deux droites, en considérant l'équation de la conique en coordonnées tangentes. Il montre que ces formules permettent de retrouver celles de la géométrie euclidienne lorsqu'on choisit les points cycliques $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$ comme *absolu*, ce qui lui fait dire que « la géométrie métrique apparaît comme une partie de la géométrie descriptive » (projective). Dans notre exemple, la métrique déduite est celle de la géométrie hyperbolique. Mais Cayley n'a pas perçu le lien avec les géométries non euclidiennes.

Cayley ne limite pas ses considérations à la géométrie plane; dans l'espace, il remplace les points cycliques par une surface quadrique quelconque et montre que la métrique dépend du choix de la quadrique.

13. La nature projective des géométries non euclidiennes

Le mathématicien allemand Felix Klein (1849-1925), une des figures de proue de la seconde moitié du XIX^e siècle, sait exploiter les idées de Cayley et, dès 1871, il entrevoit la possibilité d'englober les géométries non euclidiennes dans la géométrie projective.

Klein se propose d'examiner cas par cas les géométries métriques correspondant à toutes les quadriques dans l'espace et toutes les coniques dans le plan possibles, choisies comme *absolu*.

Dans le plan, il démontre que le choix d'une conique réelle (ellipse, hyperbole ou parabole) conduit à la géométrie de Gauss-Bolyai-Lobatchevski et celui d'une conique imaginaire à la géométrie elliptique. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ est l'exemple d'une conique imaginaire. Si l'*absolu* dégénère en deux points cycliques, on retrouve la géométrie euclidienne.

Klein introduit d'ailleurs la terminologie suivante : la géométrie de Lobatchevski est qualifiée d'*hyperbolique* puisque chaque droite y coupe la conique absolue en deux points réels; de manière analogue, l'hyperbole coupe la droite à l'infini en deux points. Celle de Riemann est appelée *elliptique* à cause de l'analogie entre l'ellipse ordinaire qui a une intersection (dans \mathbb{R}) vide avec la droite à l'infini et les droites de la géométrie riemannienne qui n'ont pas de points réels communs avec la conique absolue. La géométrie euclidienne est *parabolique* puisque ses droites coupent la conique fondamentale en un seul point réel.

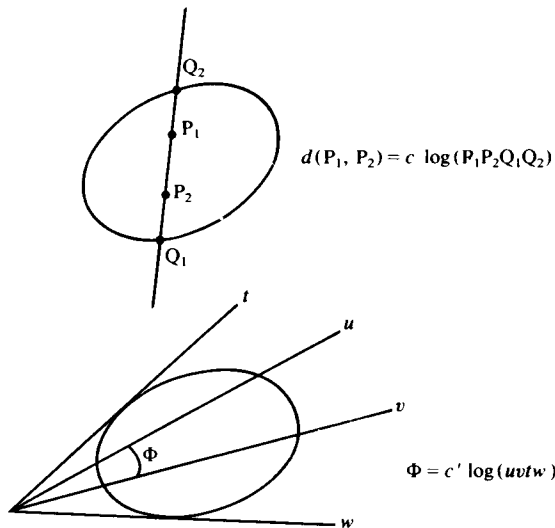
Supposons qu'on ait choisi la conique de la figure 14 comme *absolu* et qu'on veuille calculer la distance entre les deux points P_1 et P_2 . La droite qui joint ces deux points coupera l'*absolu* en deux points (réels ou imaginaires) Q_1 et Q_2 . Klein lie alors la distance entre P_1 et P_2 au bi-rapport des quatre points alignés dont deux sont les extrémités du segment à mesurer et les deux autres les points de rencontre de la droite avec l'*absolu* :

$$d = c \log(P_1, P_2, Q_1, Q_2),$$

où c est une constante.

De même, si u et v sont deux droites, on considère les tangentes t et w à l'*absolu* issues du point d'intersection des droites u et v et la mesure de

Fig. 14



l'angle entre u et v sera définie par $\Phi = c' \log(u, v, t, w)$, où c' est une constante et (u, v, t, w) le bi-rapport des quatre droites.

Klein exprime le bi-rapport en coordonnées projectives, après avoir modifié celles de von Staudt qui dépendaient du postulat des parallèles. Dès lors, la mesure des longueurs et des angles repose sur une base purement projective et l'expression de Cayley « la géométrie descriptive est toute la géométrie » est pertinente. Les géométries métriques, euclidiennes ou non, sont des cas particuliers de la géométrie projective.

14. La synthèse : le programme d'Erlangen

Le lien entre géométries métriques et géométrie projective étant désormais élucidé, Klein se propose, dans un discours prononcé à l'occasion de son admission à l'université d'Erlangen (en 1872) et intitulé *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, d'établir « un principe général d'après lequel on puisse édifier les deux méthodes ».

Son idée de base est de caractériser chaque géométrie par un *groupe de transformations*; une géométrie est alors l'étude des *invariants* par ce groupe de transformations.

Nous avons déjà souligné le rôle que les transformations ont commencé à jouer en géométrie dès le début du XIX^e siècle lorsque Poncelet a privilégié l'étude des propriétés invariantes par projection. A sa suite, les géomètres ont été amenés à identifier une figure et toutes ses transformées par projection.

Les transformations géométriques se traduisent analytiquement par des

formules de transformation des coordonnées. La conservation de certaines propriétés des figures fait apparaître des expressions algébriques qui ne sont pas altérées par certaines substitutions des variables. En particulier, les propriétés projectives s'expriment par une indépendance par rapport à toute « substitution linéaire ». Cette indépendance donne naissance à des *invariants*, formes algébriques homogènes de degrés un, deux ou plus qui se conservent lors d'une transformation linéaire des variables.

La théorie des invariants a son origine en théorie des nombres, plus précisément dans l'étude des formes quadratiques entreprise par Gauss dans les *Disquisitiones arithmeticae* (cf. chapitre 8), et a été développée à partir de 1840 essentiellement par Cayley, Sylvester et Hermite.

Mais l'innovation qui fait du programme d'Erlangen un « *moment majeur de l'histoire de la géométrie et, plus largement, de l'histoire des mathématiques* » (F. Russo) est le rapprochement entre les transformations et les groupes.

Le rôle classificateur de la notion de groupe

Si Galois avait, dès 1830, introduit la notion de groupe (cf. chapitre 8), elle ne fut pas vraiment diffusée avant Jordan (1870) et surtout elle ne sortait pas du cadre des permutations d'un ensemble fini d'objets que lui avaient assigné ses créateurs Galois et Cauchy.

Felix Klein adopte d'emblée le point de vue des groupes : « *Des notions nécessaires pour les considérations qui vont suivre, la plus essentielle est celle de groupe de transformations de l'espace.* »

« *La composition d'un nombre quelconque de transformations de l'espace redonne toujours une telle transformation. Supposons maintenant qu'un ensemble donné de transformations ait la propriété que toute transformation résultant de la composition d'un nombre quelconque d'entre elles appartienne aussi à l'ensemble, il constitue ce que l'on nomme un groupe de transformations⁴.* »

Comme exemples de groupes de transformations, Klein cite l'ensemble des déplacements, qui contient le groupe des rotations autour d'un point et qui est contenu dans le groupe des transformations homographiques.

On peut facilement montrer que les rotations autour d'un point O du plan forment un groupe. Si l'on compose une rotation d'angle α avec une rotation d'angle β , il en résultera encore une rotation, celle d'angle $\alpha + \beta$. La rotation d'angle zéro est l'identité qui laisse le point invariant; c'est l'élément neutre du groupe. Pour toute rotation d'angle α , il existe une transformation inverse, la rotation d'angle $-\alpha$ qui ramène le point dans sa position initiale.

Klein continue : « *Il y a des transformations de l'espace qui n'altèrent en rien les propriétés géométriques des figures. Par nature, ces propriétés sont, en effet, indépendantes de la situation occupée dans l'espace par la figure considérée, de sa grandeur absolue, et enfin aussi du sens dans lequel ses*

4. Klein suppose implicitement que dans les groupes du texte toute opération est accompagnée de l'opération inverse, ce qui est vrai dans les groupes *finis* de transformations.

parties sont disposées. Les déplacements de l'espace, ses transformations avec similitude et celles par symétrie n'altèrent donc pas les propriétés des figures, non plus que les transformations composées avec les précédentes. Nous appellerons groupe principal de transformations de l'espace l'ensemble de toutes ces transformations; les propriétés géométriques ne sont pas altérées par les transformations du groupe principal. La réciproque est également vraie : les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement aux transformations du groupe principal. »

Le groupe principal étant un sous-groupe du groupe projectif, Klein établit un principe de « coordination des groupes de transformations dont l'un contient l'autre », qui repose sur le procédé qui lui a permis d'interpréter les propriétés métriques d'une figure F comme les propriétés projectives d'une figure F' comprenant F et l'absolu de Cayley.

« Si l'on remplace le groupe principal par un groupe plus étendu, une partie seulement des propriétés géométriques est conservée. Les autres propriétés n'apparaissent plus comme propriétés intrinsèques des êtres géométriques, mais comme propriétés du système obtenu en leur adjoignant un être spécial. Cet être spécial, en tant qu'il est, en général, déterminé, est défini par cette condition que, en le supposant fixe, les seules transformations parmi celles du groupe donné, qui soient encore à appliquer à l'espace, soient celles du groupe principal. »

Grâce à ce principe, un ordre s'instaure sur les groupes de transformations et par suite sur les géométries, car à chaque groupe correspond une géométrie, c'est-à-dire un corps de théorèmes qui décrivent des propriétés de figures et qui restent vrais lorsqu'on soumet les figures à une transformation du groupe.

Ainsi la géométrie projective étudie les invariants par le groupe des transformations projectives (cf. encadré 9), parmi lesquels la colinéarité, le bi-rapport, la propriété d'être une conique, etc.

Les transformations affines forment un sous-groupe du groupe projectif, que Klein n'a pas explicité. On peut le définir comme le sous-groupe qui laisse la droite à l'infini invariante. Les transformations du groupe affine conservent la colinéarité et le parallélisme, mais pas les longueurs et les angles.

Les géométries métriques (planes) correspondent aux sous-groupes du groupe projectif qui laissent invariante une conique du plan projectif.

Les « propriétés au sens de la géométrie élémentaire » (dans le plan) sont considérées comme des relations projectives relatives aux points cycliques, qui sont transformés en eux-mêmes « par celles des transformations du groupe projectif qui sont aussi des transformations du groupe principal ».

Nous avons indiqué dans un tableau (cf. encadré 13) les principaux sous-groupes du groupe projectif avec leurs invariants.

Klein considère, dans son programme, des géométries plus générales que la géométrie projective. Ainsi, il caractérise la géométrie algébrique, telle qu'elle se dessinait alors, comme l'étude des invariants des transformations birationnelles (transformations rationnelles bijectives dont la réciproque est rationnelle). Sous l'influence de Riemann, il va jusqu'à introduire le groupe des transformations continues dont les invariants sont étudiés en topologie.

Le classement de Klein ne se limite pas aux groupes de transformations du plan et de l'espace mais s'applique plus abstraitement à ceux d'une

13. Les invariants des principaux sous-groupes du groupe projectif

Groupes	Position	Direction	Orienta-tion	Dis-tance	Angle	Parallé-lisme	Colinéa-rité bi-rapport
Identité							
Translations							
Déplacements							
Isométries							
Similitudes							
Gr. affine							
Gr. projectif							

multiplicité à un nombre quelconque de dimensions. C'est en termes de multiplicités qu'il a formulé le problème général, qui est au cœur du programme d'Erlangen :

« Étant donné une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe », c'est-à-dire « développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe. »

L'étude comparative met aussi définitivement fin à la scission stérile entre géométrie analytique et géométrie projective en unifiant les différents points de vue grâce au rôle fondamental qu'elle fait jouer au concept de groupe. Algèbre et géométrie fusionnent dans les objectifs et résultats du programme. Ainsi, « la théorie des formes binaires et la géométrie projective des systèmes de points d'une conique sont équivalentes », ou, encore, « la théorie des formes binaires et la géométrie du plan avec une conique fondamentale sont équivalentes ».

Par l'identification des coniques, courbes engendrées par l'intersection de deux figures de l'espace — un cône et un plan — aux formes quadratiques binaires, géométrie et algèbre se fécondent mutuellement, la première prêtant à la théorie des formes une représentation commode et élégante, la seconde fournissant la généralité de ses procédés. Les frontières entre ces deux branches s'estompent et on peut y voir une des tendances caractéristiques des mathématiques d'aujourd'hui.

15. Débordements

Le cadre que fournit le classement systématique des groupes de transformations s'est révélé rapidement trop étroit. Il est débordé, dès sa mise en place, par les vues plus fondamentales de Riemann. En effet, la géométrie projective, et son aboutissement dans le programme d'Erlangen, étudie globalement le plan ou l'espace. Ainsi la géométrie elliptique est caractérisée par des transformations qui laissent invariant un ellipsoïde imaginaire à l'intérieur duquel se déploient les propriétés des figures. Le point de vue local de Riemann permet de déceler des comportements plus fins valables seulement dans de petites parties de l'espace qu'on peut assembler en structures plus complexes sous condition de respecter les compatibilités.

L'étude locale des phénomènes nécessite des méthodes infinitésimales et emprunte ses outils à la géométrie différentielle. Le programme d'Erlangen ne peut contenir les développements de cette dernière. En effet, Klein la caractérise par le groupe de transformations qui laisse l'élément linéaire ds^2 invariant et ces invariants ne sont plus algébriques, mais différentiels, c'est-à-dire qu'ils ne s'expriment pas seulement comme une forme quadratique en dx_i et dx_j , mais contiennent aussi des dérivées. La courbure de Gauss d'une surface, qui s'exprime à l'aide des fonctions E, F et G définissant la métrique sur la surface, en est un exemple.

Sur un autre plan encore, les idées de Riemann sont en avance sur le programme d'Erlangen. L'idée ordonnatrice du programme est celle du groupe de transformations. Les transformations y sont donc essentielles; or elles opèrent sur des figures, et même s'il n'est pas entièrement fait abstraction de l'espace, il est surtout un réceptacle dans lequel les figures se transforment convenablement, c'est-à-dire en obéissant aux lois du groupe. Riemann, nous l'avons vu, s'interroge sur la nature de l'espace même et fait de l'étude des espaces l'essence de la géométrie.

Ce point de vue sera confirmé par deux développements ultérieurs, celui de la topologie générale, dont le haut niveau d'abstraction ne nous permet pas d'en relater l'histoire, et celui de la méthode axiomatique.

Après le développement prodigieux de la géométrie au XIX^e siècle, le temps était venu en effet de reconstruire les fondements, que l'avènement des géométries non euclidiennes avait fait vaciller en mettant brutalement en lumière les insuffisances des axiomes euclidiens et l'absence de définitions des « notions premières ». Ce mouvement converge vers l'axiomatisation de la géométrie euclidienne par David Hilbert (1862-1943) dans *Fondements de la géométrie (Grundlagen der Geometrie)*. Hilbert y part d'objets non définis dont la nature n'importe pas et spécifie les relations entre eux par des axiomes.

La possibilité est ainsi reconnue de définir axiomatiquement des espaces abstraits dont les éléments sont appelés « points » sans qu'on sache si ce sont des nombres, des courbes, des surfaces, des fonctions, etc. Depuis la fin du XIX^e siècle, l'usage s'est instauré de décrire les propriétés de ces espaces abstraits dans le langage de la géométrie classique. Ce langage très suggestif permet à l'intuition géométrique de s'exercer, non plus sur les corps concrets de l'espace physique ou sur les figures et épures du plan, mais sur des objets

plus généraux et universels définis par une suite de mots et de symboles (les axiomes). Si cette poussée vers l'abstraction signifie la fin de la géométrie comme science des figures de l'espace et branche séparée des mathématiques, ses méthodes d'investigation restent vivantes.

Ouvrages originaux d'accès aisé

- Desargues G., *Œuvres réunies et analysées* par M. Poudra, Paris, 1864.
On peut trouver une analyse de Desargues dans R. Taton, *L'Œuvre mathématique de Desargues*, Paris, PUF, 1951.
- Descartes R., *La Géométrie*, New York, Reprint, Dover Publ., 1954.
- Euclide, *Éléments de géométrie*, trad. F. Peyrard, Paris, réimpr. Blanchard, 1966.
- Gauss C. F., *Recherches générales sur les surfaces courbes*, traduites en français par E. Roger, Paris, Blanchard, 1967.
- Klein F., *Le Programme d'Erlangen*, Paris, Gauthier-Villars, coll. « Discours de la méthode », 1974.
- Lobatchevski N., *Pangéométrie*, 1856.
- Monge G., *Géométrie descriptive*, Paris, Gauthier-Villars, 1864.
- Poncelet J.-V., *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, Gauthier-Villars, 1865, 2^e éd.
- Riemann B., *Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie*, Œuvres de Riemann, trad. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Quelques références qui nous ont particulièrement guidées

- Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Paris, Gauthier-Villars, 1878, 2^e éd.
- Dieudonné J., *L'Œuvre mathématique de C. F. Gauss*, conférence donnée au palais de la Découverte le 2 décembre 1961.
- Godeaux L., *Les Géométries*, Paris, coll. Armand Colin n° 206, 1937.
- Hauser G., *Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid*. Haag Luzern, 1955.
- Klein F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. New York, Chelsea Publ. Co., 1967 (Reprint).
- Peiffer J., *Espace et Multiplicité d'espaces*, Dupé, n° 8/9, novembre 1980.
- Russo F., *Groupes et géométrie. La genèse du programme d'Erlangen de Félix Klein*, conférence donnée au palais de la Découverte le 4 mai 1968, publiée comme postface à l'édition du programme d'Erlangen par Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- Struik D. J., *Outline of a History of differential Geometry*. Isis, XIX et XX (1933-1934).
- Taton R., *Histoire de la géométrie descriptive. La Géométrie projective en France de Desargues à Poncelet*, conférences du palais de la Découverte, série D, n° 32 et n° 4, Paris, 1954 et 1951.
- *L'Œuvre scientifique de Gaspard Monge*, Paris, 1951.
- Youschkevitch A. P., *Les Mathématiques arabes*, Paris, Vrin, 1976.

5. La limite : de l'impensé au concept

Le calcul infinitésimal a son origine dans la conception intuitive qu'avaient les Grecs des notions de *continu*, d'*infini mathématique* et de *limite* ainsi que dans leurs difficultés à formuler explicitement ces notions. Toutes les trois ne seront correctement définies qu'au XIX^e siècle lorsque les mathématiciens désireux de systématiser les progrès accomplis reviendront aux fondements pour asseoir l'édifice mathématique sur des bases solides.

1. Nombres et grandeurs géométriques

Le concept de nombre — et *a fortiori* celui de nombre réel — a mis longtemps à se dégager de ses supports concrets. Les pythagoriciens (585-400 avant J.-C.) seraient les premiers à avoir reconnu la nécessité d'un tel concept et auraient commencé à le dégager. Nous avons vu que les pythagoriciens assimilaient les nombres à des points géométriques, une unité à un point, un nombre à un groupe de points dessinant une figure géométrique. Chaque nombre étant une collection discrète d'unités, l'arithmétique pythagoricienne se limite à l'étude des nombres entiers et positifs et des rapports de nombres entiers, qui n'étaient pas considérés comme des nombres.

Toute grandeur continue — ligne, surface, corps — pouvait être identifiée à un nombre, un « *quantum* » (longueur, aire, volume) qui lui convenait. Tout comme l'unité est une mesure commune aux nombres entiers, les grandeurs devaient avoir une unité de mesure commune — être *commensurables* — et chaque grandeur était identifiée au nombre entier d'unités qui la composent. Cette tentative d'identifier les nombres entiers et les grandeurs continues, d'interpréter le continu en termes de discret, ne pouvait pas aboutir et devait échouer rapidement.

C'est la découverte des nombres irrationnels qui constitue le naufrage de cette mise en correspondance des grandeurs et des nombres entiers. Dans un carré de côté 1, le rapport de la diagonale au côté vaut $\sqrt{2}$, ne peut donc pas s'exprimer par un nombre entier et n'a pas de statut dans le champ de l'arithmétique pythagoricienne. Le côté et la diagonale n'ont plus d'unité de mesure commune et sont appelés *incommensurables*. La réciprocité entre la grandeur et le nombre, familière aux pythagoriciens, est détruite. A tout nombre correspond toujours une longueur, mais quel nombre associer à des grandeurs incommensurables? (Cf. encadré 1.)

1. La découverte des irrationnels

Selon Proclus, Euclide aurait commenté la légende d'après laquelle celui qui le premier avait divulgué l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aurait péri noyé dans un naufrage :

« Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché. Que si l'âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants. »

2. L'intrusion de l'infini : les paradoxes de Zénon

C'est précisément par le biais de la découverte des grandeurs incommensurables que l'infini fait irruption dans la mathématique grecque. Dans leur recherche d'une unité de mesure commune à toutes les grandeurs, les géomètres grecs auraient pu considérer les grandeurs divisibles à l'infini, mais l'idée d'infini les plongeait dans un profond désarroi. Si les spéculations sur l'infini allaient bon train, les Grecs tenteront toujours dans leurs théories mathématiques de le contourner et de l'évacuer. Leur malaise d'expliquer les notions abstraites d'infini et de continu, opposées au fini et au discret, se traduit remarquablement dans les *paradoxes de Zénon d'Élée*.

A l'époque de Zénon (deuxième moitié du V^e siècle avant J.-C.), deux conceptions s'opposaient : la conception *continuiste* pensait le nombre, l'espace, le temps et la matière comme divisibles à l'infini; la conception *atomiste* préconisait l'existence d'éléments premiers indivisibles. Les arguments de Zénon sont des « apories » (impasses), ils tentent d'établir que dans les deux hypothèses on aboutit à une impasse.

Celui d'*Achille et la tortue* s'oppose à la divisibilité infinie de l'espace et du temps. Achille faisant la course avec la tortue se montre beau joueur et accorde une avance à la tortue. Pendant qu'il parcourt la distance qui le sépare du point de départ de la tortue, cette dernière avance à son tour; l'écart entre Achille et la tortue se réduit, certes, mais la tortue conserve l'avantage. Alors qu'Achille couvre la nouvelle distance qui le sépare de la tortue, la tortue avance elle aussi, etc. Si l'espace est divisible à l'infini, Achille ne pourra jamais rattraper la tortue. Ce qui est en jeu dans ce paradoxe, c'est la difficulté de sommer une infinité de quantités de plus en plus petites et l'impossibilité de concevoir intuitivement que cette somme puisse être égale à une grandeur finie.

L'argument est plus explicite encore dans la *dichotomie* : avant de pouvoir parcourir une ligne tout entière, un mobile doit d'abord couvrir la moitié de cette ligne, puis la moitié de cette moitié, et ainsi de suite à l'infini. Zénon constitue mentalement la série $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$, dont la somme vaut 1, mais n'arrive pas à en saisir intuitivement le contenu. Les notions modernes de limite et de convergence d'une série permettent d'affirmer qu'à partir d'un certain rang l'écart entre Achille et la tortue devient inférieur à

2. Définition de la limite

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

admet pour limite a , si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour tout entier n supérieur à N , la différence $a - a_n$ soit inférieure en valeur absolue à ε .

Une série de terme général u_n

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

est convergente et converge vers S si la suite des sommes partielles S_n définies par

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

admet pour limite S .

un nombre ε donné que l'on aura choisi aussi petit que l'on voudra (cf. encadré 2).

Le paradoxe de la flèche suppose que l'espace et le temps soient composés de parties indivisibles, disons de « points » et d'« instants ». A un « instant » de son vol, une flèche occupe donc un « point » de l'espace et y est au repos. Cela étant vrai à chaque instant de son vol, la flèche ne peut pas être en mouvement.

La notion de vitesse instantanée est ici en cause. Quelle valeur attribuer au rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ de la distance parcourue Δx par l'intervalle de temps Δt si la quantité Δt devient très petite? Incapables d'imaginer un minimum non nul, les Anciens lui assignaient la valeur zéro. Aujourd'hui, la notion de limite fournit immédiatement la bonne réponse : la vitesse instantanée est la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro.

C'est donc la notion de limite que nous voyons à l'œuvre dans les paradoxes cités; elle sera le concept central du calcul infinitésimal.

Nous connaissons les paradoxes de Zénon grâce à Aristote, qui les a rapportés dans la *Physique* afin de les critiquer. C'est alors qu'il distingue entre l'infini selon l'addition et l'infini selon la division et établit que le continu est divisible à l'infini. Le temps l'est de même et en un intervalle fini de temps on peut parcourir une distance divisible à l'infini. Le paradoxe de la flèche qui « est conséquence de la supposition que le temps est composé d'instant » devient caduc lorsqu'on admet que le temps est divisible à l'infini.

3. La méthode d'exhaustion : la négation de l'infini

La découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré et de son côté a entraîné celle de bien d'autres grandeurs incommensurables. La théorie

des proportions d'Eudoxe (né vers 408 avant J.-C.), exposée au Livre V des *Éléments* d'Euclide, est une tentative de donner un statut aux grandeurs incommensurables et témoigne d'une certaine manière de l'admission des nombres irrationnels dans le champ de la mathématique grecque. Elle est à la base de la méthode d'exhaustion, qui permettra aux Grecs de résoudre des problèmes qui relèveront plus tard du calcul infinitésimal : calcul des longueurs de courbes, calcul d'aires ou de volumes délimités par des courbes ou des surfaces courbes, détermination des centres de gravité, construction des tangentes, etc. Cette méthode se fonde en outre sur un axiome de mesurabilité, l'axiome d'Archimède devenu nécessaire après que la découverte des irrationnels eut rendu impossible l'identification des grandeurs géométriques et des nombres (cf. encadré 3).

3. Axiome d'Archimède

L'axiome d'Archimède tel qu'il est énoncé au livre X des *Éléments* d'Euclide :

« En soustrayant de la plus grande de deux grandeurs données plus de sa moitié, du reste plus de sa moitié, etc., on peut arriver à une grandeur moindre que la plus petite grandeur. »

Et en termes modernes :

Si a et b sont des nombres réels positifs, $a > b$, alors il existe toujours un nombre naturel m tel que $mb > a$.

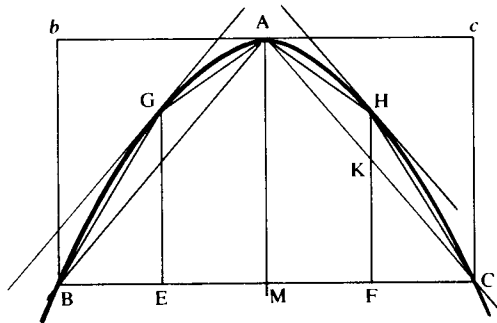
Mesurer, qu'est-ce que cela signifie pour les géomètres grecs? Eudoxe se garde d'associer des nombres aux longueurs des segments de courbes, aux aires curvilignes, etc. Incapables de trouver une unité de mesure commune aux grandeurs incommensurables, les Grecs ne mesurent pas les grandeurs géométriques mais les comparent entre elles en calculant leurs rapports. Ils comparent les longueurs courbes aux longueurs rectilignes — ils rectifient les courbes —, les aires curvilignes aux aires rectilignes. La *quadrature* d'une surface est d'ailleurs étymologiquement la construction d'un carré, ou par abus de langage, d'un triangle, etc., ayant même aire que la surface considérée. La *curvature* est la généralisation dans l'espace de la notion de quadrature, les constructions devant se faire selon la tradition grecque à l'aide des seuls règle et compas. Calculer la mesure de l'aire d'une surface est un faux problème pour les Grecs, mais déterminer le rapport de deux aires est un problème susceptible d'être résolu dans le cadre de leurs mathématiques. Aussi la méthode d'exhaustion développée par Eudoxe, Euclide et Archimède permet-elle de comparer l'aire d'une surface A (d'un segment de parabole, par exemple) à l'aire d'une surface S connue (d'un carré ou d'un triangle, par exemple).

La méthode d'exhaustion consiste à construire deux surfaces U et V encadrant à la fois la surface dont on cherche à déterminer l'aire A et la surface S donnée et telles que la différence $V - U$ soit aussi petite que l'on voudra. On démontrera ensuite par l'absurde que A est égal à S .

Dans *De la quadrature de la parabole*, Archimède (287-212 avant J.-C.) démontre rigoureusement qu'« un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment ». (Proposition 17.) Voici comment il procède (cf. fig. 1).

Soit BAC le segment de parabole donné, A le point où la tangente est parallèle à la sécante BC, et Bb, Cc deux parallèles au diamètre AM qui coupe

Fig. 1



toutes les cordes parallèles à BC en leur milieu de sorte que M soit le milieu de BC. Archimède montre que l'aire du triangle ABC vaut la moitié de celle du parallélogramme bBcC et excède donc la demi-aire du segment parabolique. Il construit ensuite un triangle dans le segment découpé par la sécante AC et dont HK est le diamètre. Des considérations géométriques simples montrent que l'aire du triangle AHC vaut alors $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC et la somme

des aires des triangles BGA et AHC vaut $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle ABC. De plus,

les deux triangles remplissent plus de la moitié des segments paraboliques dans lesquels ils sont inscrits et Archimède peut itérer ce processus et, appliquant l'axiome de mesurabilité, construire un polygone approchant le segment parabolique d'autant près que l'on voudra. « Il est évident qu'on peut inscrire dans ce segment un polygone de manière que la somme des segments restants soit plus petite que toute surface donnée. Car, en retranchant continuellement une surface plus grande que la moitié, nous diminuerons continuellement la somme des segments restants, et nous la rendrons par conséquent plus petite que toute surface proposée. » (Proposition 20.)

Pour calculer l'aire du polygone inscrit dans le segment parabolique, Archimède doit sommer les aires des triangles inscrits, c'est-à-dire qu'il doit calculer la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$ dont le premier terme

est l'aire A du triangle ABC. Archimède évite de calculer la somme de la série infinie, mais calcule la somme des n premiers termes, y ajoute le reste $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A$ et utilise l'identité :

$$A + \frac{1}{4} A + \frac{1}{4^2} A + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A = \frac{4}{3} A.$$

Si le nombre de côtés du polygone inscrit, c'est-à-dire le nombre de termes de la série augmente, le reste $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} A$ deviendra aussi petit que l'on voudra et l'aire S du segment vaudra $\frac{4}{3} A$. Archimède n'exprime pas l'idée que le reste disparaît et que la somme de la série infinie est égale à $\frac{4}{3} A$, mais démontre par l'absurde que l'aire S du segment parabolique ne peut être ni inférieure ni supérieure à $\frac{4}{3} A$.

Il suppose d'abord que l'aire S du segment parabolique est supérieure à $\frac{4}{3} A$. Il doit alors exister n triangles tels que la somme

$$U = A \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right)$$

de leurs aires soit inférieure à S et supérieure à $\frac{4}{3} A$. U étant égal à $\frac{4}{3} A - \frac{1}{3} \cdot \frac{A}{4^{n-1}}$, U est aussi inférieur à $\frac{4}{3} A$, ce qui est contradictoire, et l'hypothèse $S > \frac{4}{3} A$ est rejetée.

Archimède admet ensuite que S est inférieur à $\frac{4}{3} A$ et pose la différence $D = \frac{4}{3} A - S$. D'après l'axiome d'Archimède, il doit alors exister un indice m

tel que l'aire $A_m = \frac{1}{4^{m-1}} A$ soit inférieure à la grandeur D donnée.

D'autre part,

$$A_m > \frac{1}{3} A_m = \frac{4}{3} A - A \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$$

et $\frac{4}{3} A - S > A_m > \frac{4}{3} A - A \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$,

d'où il suit que

$$S < A \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right),$$

ce qui contredit l'évidence géométrique, puisque $A \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{m-1}} \right)$ est l'aire du polygone inscrit dans le segment parabolique.

On voit que, dans l'application concrète de la méthode, Archimède évite d'utiliser une notion aussi obscure que celle d'un polygone à un nombre infini de côtés qui coïnciderait à la limite avec le segment parabolique. Il augmente le nombre de côtés du polygone jusqu'à ce que la quantité résiduelle soit aussi petite que l'on voudra, mais il y aura toujours un reste. Les aires approchées n'épuisent pas *exhaustivement* l'aire recherchée, contrairement à ce qui se passera dans les méthodes du XVII^e siècle dérivées de la méthode ancienne. C'est pour cela d'ailleurs que Grégoire de Saint-Vincent (1647) a donné le nom d'exhaustion à la méthode en question.

La méthode ancienne avec son double raisonnement par l'absurde évite ingénieusement toute considération infinitésimale, même si la démarche sous-jacente est une investigation infinitésimale. On ne peut nier la présence d'une idée de limite, même si celle-ci n'est jamais explicite. Une définition rigoureuse présupposerait de toute façon une théorie générale des nombres irrationnels. Dans tous les cas auxquels les Grecs ont appliqué la méthode d'exhaustion, ils ont formulé et démontré la propriété que la grandeur cherchée A diffère de la grandeur approchée U d'aussi peu que l'on voudra, c'est-à-dire en termes modernes que A est la limite des grandeurs U. Mais ils répètent la même forme de démonstration dans chaque cas particulier et ignorent l'analogie entre tous ces problèmes. Aucune méthode générale n'a pu se dégager.

Par ailleurs, la méthode d'exhaustion n'est pas une méthode de découverte. Elle permet d'établir rigoureusement des résultats pressentis autrement. La *Lettre d'Archimède à Eratosthène* (qui ne fut découverte qu'au début du XX^e siècle) permet de mieux saisir la méthode heuristique utilisée par Archimède. Celle-ci, fondée sur l'idée qu'une surface est composée de lignes, permet de comparer à l'aide de considérations mécaniques la valeur de l'aire du segment parabolique à celle de l'aire d'un triangle, par exemple en « pesant » les segments de droites composant le segment parabolique, d'une part, et le triangle, de l'autre. Elle utilise le principe du levier : les poids sont inversement proportionnels à leurs distances du point fixe du levier en équilibre. Ces dernières distances permettront d'établir le rapport des surfaces, qu'on démontrera alors géométriquement par la méthode d'exhaustion.

4. La reprise arabe

Malgré — ou peut-être à cause de — la grande originalité de ses travaux, Archimède n'a été que peu suivi dans le monde grec et n'a pas eu de disciples directs.

Les savants arabes commencent dès le IX^e siècle à s'intéresser aux procédés infinitésimaux mis en œuvre par le génial Alexandrin. Les frères Banu Musa utilisent, pour la première fois dans la littérature islamique, la méthode d'exhaustion. Leur disciple Thabit ibn Qurra (836-901) traduit en arabe la *Sphère et le cylindre* et fait preuve dans son *Livre sur la mesure de la section conique appelée parabolique* d'une parfaite maîtrise du procédé grec. Il y résout le problème de la quadrature du segment de parabole au moyen de

sommes intégrales qu'Archimède avait utilisées dans la quadrature de la spirale, la cubature d'un paraboléide de révolution, etc., mais qu'il n'avait pas employées pour carrer la parabole. Ibn Qurra commence par démontrer quinze lemmes arithmétiques, il calcule notamment la somme de la suite des n premiers nombres impairs

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

et la somme de la suite des carrés des n premiers nombres impairs

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{2}{3} \cdot 2n \sum_{k=1}^n (2k-1) - \frac{n}{3}.$$

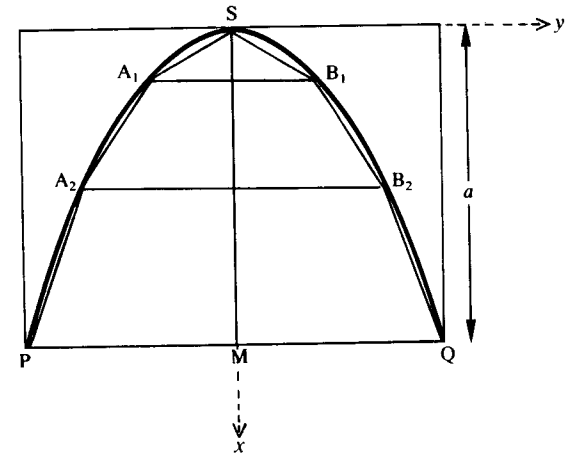
Il applique cette dernière formule à des segments $a_k = (2k-1)a$ et $b_k = 2k \cdot b$ proportionnels aux nombres impairs et pairs et démontre enfin que pour n entier suffisamment grand le rapport

$$n : \left[\sum_{k=1}^n (2k-1) \right] \cdot 2n$$

est inférieur à tout rapport donné A/B (ce qui équivaut à $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$). Il

utilise ce résultat pour carrer un segment de parabole d'aire S (que nous choisissons ici droit avec une corde perpendiculaire à l'axe), la parabole étant définie par une propriété que nous écrirons aujourd'hui $y^2 = px$ (cf. fig. 2).

Fig. 2



Selon A. P. Youschkevitch, Ibn Qurra divise l'axe du segment en n parties proportionnelles aux nombres impairs $q, 3q, 5q, \dots, (2n-1)q$, où $q = \frac{a}{n^2}$ si a est la longueur du segment d'axe et démontre que les cordes passant par les points de la partition (c'est-à-dire les ordonnées) sont alors proportionnelles aux nombres pairs $2\sqrt{pq}, 4\sqrt{pq}, 6\sqrt{pq}, \dots, 2n\sqrt{pq}$.

L'aire du polygone inscrit S_n , dont les sommets sont le sommet de la parabole et les extrémités des cordes, est évaluée en additionnant l'aire du triangle $\Delta_n = A_1SB_1$ et les aires des trapèzes $A_2A_1B_1B_2$...

$$S_n = \frac{1}{2} q \cdot 2\sqrt{pq} + \frac{1}{2} 3q (2\sqrt{pq} + 4\sqrt{pq}) + \dots \\ + \frac{1}{2} (2n - 1) q [(2n - 2)\sqrt{pq} + 2n\sqrt{pq}].$$

Ibn Qurra démontre, à l'aide des sommes calculées au début, que S_n est inférieur de $\frac{n}{3} \Delta_n$ aux $\frac{2}{3}$ du rectangle R circonscrit au segment, c'est-à-dire que $\frac{2}{3} R - S_n < \frac{n}{3} \Delta_n$. Il utilise l'axiome d'Archimède pour établir que la différence $S - S_n$ peut être rendue plus petite que toute aire donnée si le nombre n de subdivisions est suffisamment grand. De même $\frac{2}{3} R - S_n$ est inférieur à toute aire donnée, si n est suffisamment grand.

Finalement, ibn Qurra démontre par l'absurde que $S = \frac{2}{3} R$, car compte tenu des inégalités ci-dessus, les hypothèses $S > \frac{2}{3} R$ et $S < \frac{2}{3} R$ aboutissent à une contradiction.

En fait, Thabit ibn Qurra calcule l'équivalent de $\int_0^a \sqrt{px} dx$, c'est-à-dire une intégrale de la forme $\int_0^a x^n dx$ avec, pour la première fois, un exposant n fractionnaire, à savoir $1/2$. Il contribue ainsi à faire revivre les méthodes infinitésimales d'Archimède.

Les savants arabes les appliquent au calcul du volume de paraboloides de révolution engendrés par la rotation de segments de parabole définis par une corde quelconque et retrouvent des résultats d'Archimède et obtiennent des résultats nouveaux. Dans un deuxième temps, à la fin du X^e siècle, Al-Kuhî et Ibn Al-Haytham introduisent des méthodes de cubature originales, qui restent pourtant marquées par l'influence grecque. Ibn Al-Haytham calcule pour la première fois l'équivalent de $\int_0^a x^4 dx$ en déterminant le volume d'un parabolôïde de révolution.

Vers la même époque, l'astronome Al-Biruni étudie le mouvement non uniforme et conçoit les notions de vitesse et d'accélération instantanées.

5. Le Moyen Age : l'âge de respectabilité

Si les Arabes dominent la méthode grecque d'exhaustion dès le IX^e siècle et développent des méthodes voisines, l'Occident médiéval ignore à peu près

totalemment les travaux archimédiens. Mais les spéculations scolastiques sur l'infini, l'infiniment petit et la nature du continu ravivent l'intérêt pour le problème de l'infini et préparent l'acceptation des considérations infinitésimales au XVII^e siècle.

C'est autour de la théorie de l'atomisme que se cristallisent les discussions sur l'incommensurable, les indivisibles et l'infini. Thomas Bradwardine (XIV^e siècle), opposé à toute forme d'atomisme, étudie la nature du continu et affirme que les grandeurs continues sont constituées d'un nombre infini d'indivisibles, qui ne sont pas des atomes, mais des continus de même espèce. Richard Swineshead (dit aussi Calculator, XIV^e siècle) étudie la nature de l'infini et discute la distinction aristotélicienne entre infinis actuel et potentiel. Mais les spéculations scolastiques ne sont aucunement dirigées vers la définition et la constitution de concepts mathématiques, mais sont centrées sur la question métaphysique de l'existence réelle des indivisibles ou de l'infini. Elles jouent cependant un rôle non négligeable en maintenant l'intérêt pour le problème de l'infini et en rendant plus respectables les méthodes infinitésimales.

Le plus grand progrès théorique réalisé au Moyen Age est l'étude quantitative de la variabilité par Nicole Oresme (cf. chapitre 6, page 210). Éveillé par la diffusion des méthodes infinitésimales des Anciens, et d'Archimède en particulier, nourri par les spéculations scolastiques sur l'infini, le goût des mathématiciens pour les considérations infinitésimales se développe peu à peu. Ils s'appliquent d'abord à imiter le modèle archimédien, puis s'émancipent et essaient de trouver des substituts pour la méthode d'exhaustion, jugée trop lourde.

6. La libéralisation : Stevin, Valerio

L'ingénieur flamand S. Stevin (1586) utilise librement la méthode d'Archimède pour déterminer les centres de gravité de figures curvilignes planes. Il approche ces dernières par le procédé des subdivisions successives par des polygones inscrits (ou circonscrits) et constitue des séries géométriques, un peu comme Archimède, dans la quadrature de la parabole, avait formé la série $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$. Mais alors qu'Archimède s'arrêtait au $n^{\text{ième}}$ terme pour y ajouter un reste, Stevin considère des séries infinies dans le sens scolastique hérité d'Aristote d'infini potentiel, c'est-à-dire que la série peut être prolongée jusqu'à ce que la différence entre la figure curviligne et la figure rectiligne approchée soit aussi petite que l'on voudra. Stevin juge cette partie de la démonstration suffisante pour établir la validité du théorème et omet — en hésitant, certes, et en prenant ses précautions — la double *reductio ad absurdum* qu'exigeaient les canons de la rigueur grecque. La méthode d'exhaustion s'en trouve considérablement allégée.

Luca Valerio (1552-1618), élève de l'éditeur vénitien des œuvres

archimédiennes Federigo Commandino, l'a modifiée en la généralisant. A la double réduction, il substitue un théorème général qu'il n'a plus qu'à citer au lieu de faire la démonstration dans tous ses détails.

7. Les considérations infinitésimales de J. Kepler

Alors que Stevin et Valerio, tout en prenant des libertés avec la rigueur archimédienne, restaient encore dans le droit fil de la tradition grecque, Johann Kepler (1571-1630) abandonne les procédés classiques et a recours à des méthodes plus intuitives que lui ont inspiré les travaux de Nicolas de Cues. Il assimile le cercle à un polygone régulier à un nombre infini de côtés et calcule son aire en sommant les aires des triangles infinitésimaux ayant les côtés du polygone comme bases et le centre du cercle comme sommet. Il n'explique guère les conceptions sur lesquelles il fonde sa manière de procéder. En général, il décompose les surfaces et les volumes en une infinité d'éléments infinitésimaux de même dimension, mais parfois il utilise le langage des indivisibles. Il ne distingue ni une aire infinitésimale d'une ligne ni un cercle d'un polygone à une infinité de côtés. Il applique sa méthode au calcul des volumes de révolution (sphère, cône, cylindre, tore, etc.).

L'influence de Kepler a été très grande et la *Stereometria doliorum* (1615), dans laquelle il indique un procédé pour calculer le contenu des tonneaux de vin, a servi de modèle pendant un demi-siècle environ. Kepler y considère également des problèmes de maxima et de minima. Il les résout à l'aide de considérations numériques en établissant des tables, qui lui permettront de comparer les volumes d'un solide lorsque ses dimensions varient. Ainsi, il montre que le cube est le plus grand parallélépipède droit à base carrée inscrit dans une sphère et que de tous les cylindres droits ayant même diagonale, le cylindre dont la hauteur et le diamètre sont dans le rapport $1/\sqrt{2}$ a un volume maximum. Examinant ces tables, il remarque qu'au voisinage du plus grand volume la variation de volume est plus faible pour une variation des dimensions donnée. Cette idée réapparaîtra au XVII^e siècle dans les travaux de Pierre de Fermat.

8. La méthode des indivisibles

Cavalieri

Élève de Galilée, familier des spéculations scolastiques sur le mouvement, l'infini, l'infinitésimal et la nature du continu, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) a développé la méthode des indivisibles dans *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, publié en 1635. L'ouvrage ne contient aucune définition des indivisibles, mais Cavalieri caractérise ainsi les éléments infinitésimaux dont se composent les surfaces et les volumes. Il considère une figure plane comme l'ensemble de ses lignes et

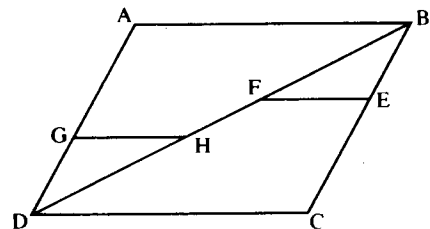
conçoit le solide comme composé d'un nombre « indéfini » de plans parallèles. Il dit qu'une ligne est formée de points comme un collier de perles, qu'une surface est formée de lignes comme un tissu de fils et qu'un volume est constitué de plans comme un livre de pages.

Cavalieri se rend très bien compte de la difficulté inhérente à la sommation d'un nombre infini d'éléments. Contrairement à son maître Galilée, il ne spéculé pas sur la nature de l'infini, mais évite de calculer l'aire de la surface comme somme de tous les indivisibles constitutifs. Il détermine plutôt le rapport des aires de figures dont les indivisibles sont dans un rapport constant, comme dans l'exemple que nous développons dans l'encadré 4, où le rapport vaut 1. La méthode de Cavalieri a suscité beaucoup de critiques, beaucoup d'enthousiasmes aussi.

4. La méthode des indivisibles

Exemple d'une démonstration.

Cavalieri se propose de démontrer que l'aire du parallélogramme vaut le double de l'aire de chacun des triangles obtenus en traçant la diagonale du parallélogramme.



Si G et E sont deux points tels que $GD = BE$, et si GH et FE sont tracés parallèlement à DC, alors les segments GH et FE seront égaux.

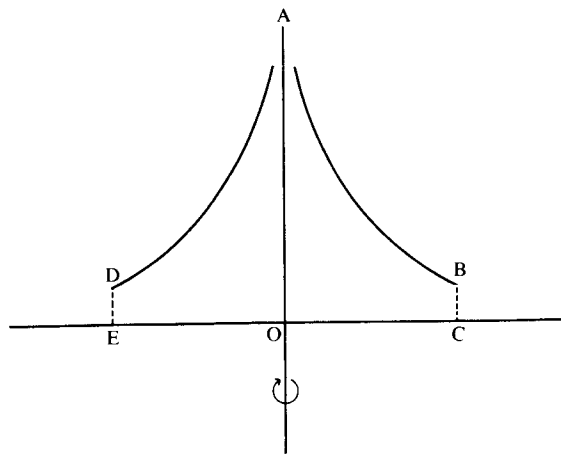
La somme de toutes les lignes du triangle ADB sera donc égale à la somme de toutes les lignes du triangle DBC et les deux triangles auront des aires égales. La somme des lignes du parallélogramme ABCD est le double de la somme des lignes d'un des deux triangles.

Evangelista Torricelli (1608-1647), disciple de Galilée et ami de Cavalieri, a perfectionné la méthode et l'a utilisée par exemple pour établir que le volume du solide infiniment long engendré par la rotation d'une portion d'hyperbole équilatère autour de son asymptote est fini (fig. 3). Torricelli y considère des indivisibles cylindriques alors que ceux de Cavalieri sont invariablement plans.

Roberval

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) développe, indépendamment de Cavalieri, une méthode des indivisibles, qui, plutôt que de s'appuyer sur

Fig. 3



l'approche géométrique de Cavalieri, renoue avec le point de vue quasi arithmétique de Stevin et de Valerio considérant des séries arithmétiques infinies. Contrairement à Cavalieri, qui soutient que la surface est formée de lignes, Roberval prétend qu'elle se compose de surfaces : « On peut comprendre que la multitude infinie de points se prend pour une infinité de petites lignes et compose la ligne entière. L'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale. L'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total. » (*Traité des indivisibles*, page 249.)

Roberval utilise les indivisibles pour déterminer l'aire comprise sous une arche de cycloïde. La cycloïde ou *roulette*, courbe décrite par le point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite — elle « n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue quand elle roule de son mouvement ordinaire », dira Pascal —, est la courbe la plus à la mode au XVII^e siècle; elle permet aux géomètres de mettre au point les nouvelles techniques à l'origine du calcul infinitésimal.

Supposons que le cercle AHBF de diamètre d (cf. fig. 4) roule sur la droite (D) et qu'après un demi-tour le diamètre AB du cercle générateur se trouve en DC. Le segment AC doit alors être égal à la demi-circumférence AFB et APD sera la cycloïde décrite par le point A. Si P est un point quelconque de la cycloïde et Q tel que PQ soit égal à EF = HE, alors le point Q décrira une courbe AQD, appelée la *compagne de la cycloïde*, qui n'est autre qu'une sinusoïde.

Roberval démontre à l'aide des indivisibles que cette courbe doit partager le rectangle ABCD en deux parties égales. En effet, à tout segment EQ de la partie AQDB correspond un segment RS de la partie ACDQ, et les deux surfaces ayant leurs indivisibles constitutifs égaux doivent avoir des aires égales. Or le rectangle ABCD a une base AC égale à la demi-circumférence

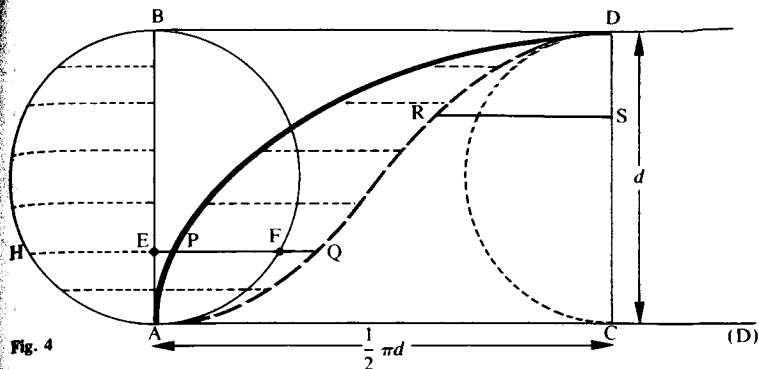


Fig. 4

AFB et une hauteur AB égale au diamètre d du cercle générateur. Son aire vaut donc

$$\frac{1}{2} (d \cdot \pi d) = \frac{1}{2} \pi d^2 = 2 \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

c'est-à-dire deux fois l'aire du cercle. L'aire AQDC est donc égale à celle du cercle générateur. Par construction, l'aire APDQ vaut celle du demi-cercle et l'aire APDC sous la cycloïde, étant la somme des deux aires APDQ et AQDC, vaut 1,5 fois l'aire du cercle générateur.

Alors que la méthode des indivisibles de Cavalieri allie le modèle archimédien aux influences médiévales, celle de Roberval et surtout celle de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) s'inspirent des modifications introduites par Stevin et Valerio dans la méthode d'exhaustion. Grégoire conçoit une infinité de figures rectilignes qui remplissent *exhaustivement* la figure curviligne donnée, contrairement à ses prédécesseurs qui augmentaient le nombre de côtés des polygones inscrits ou circonscrits jusqu'à ce que la différence entre ceux-ci et la figure soit inférieure à une quantité donnée. Il est probablement le premier à énoncer explicitement qu'une série infinie définit une grandeur, un « terminus », que la série, même prolongée indéfiniment, n'atteint pas mais dont elle s'approche de si près que l'écart est inférieur à tout intervalle donné.

9. L'écllosion des méthodes infinitésimales au XVII^e siècle

Ce n'est pas un hasard si les investigations infinitésimales se multiplient au début du XVII^e siècle. Bien au contraire, les techniques utilisant les quantités infiniment petites sont mises au point pour résoudre des problèmes à l'ordre du jour.

L'étude du mouvement, inaugurée au Moyen Age, nécessite la notion de *vitesse instantanée*. Si l'on veut calculer la vitesse d'un projectile à un instant

de son vol, on ne peut plus diviser la distance parcourue par le temps, comme les mathématiciens avaient l'habitude de le faire pour calculer la vitesse moyenne, car les deux quantités sont nulles et le quotient de zéro par zéro n'a pas de sens.

La notion de *tangente* est nécessaire pour déterminer la direction d'un corps en mouvement en un point de sa trajectoire.

L'étude de la courbe que parcourt un projectile, un boulet de canon, par exemple, et l'étude du mouvement des planètes posent *des problèmes de maxima et de minima*.

En mécanique céleste, il importe de calculer *la longueur des trajectoires* des planètes, c'est-à-dire de rectifier des courbes.

Les recherches en optique sur le passage de la lumière à travers une lentille exigent la connaissance de l'angle que fait le rayon lumineux avec la *normale* — perpendiculaire à la tangente — à la courbe. Or toutes ces notions — vitesse instantanée, tangente, maxima et minima, longueur des courbes, normale — sont tributaires du calcul infinitésimal (différentiel et intégral), dont les notions centrales sont la dérivée et l'intégrale.

Quant au calcul intégral, nous avons vu que le procédé grec d'exhaustion en est une anticipation qui permet de calculer les quadratures, les volumes de révolution et les centres de gravité. Les méthodes de quadrature du XVII^e s'inspirent très largement de la méthode ancienne débarrassée de la double démonstration par l'absurde (jugée nécessaire par les Grecs pour établir que l'aire cherchée est bien égale à celle de la figure approchée). Alors que les Anciens approchaient les figures curvilignes par des polygones quelconques, quelques géomètres du XVII^e commencent par y inscrire systématiquement des rectangles.

Les quadratures de Fermat et de Pascal

Pierre de Fermat (1601-1665), maîtrisant parfaitement les méthodes archimédiennes, sait dès 1636 carrer les paraboles $y = ax^m$, m entier positif, comme l'indique sa correspondance avec Roberval. Plus tard, Fermat établit un nouveau procédé plus général qu'il fait connaître dans un écrit intitulé *Sur la transformation et la simplification des équations de lieux...* Sa méthode, « *uniforme et constante* » lui permet de « *carrer au moyen d'une progression géométrique* » toutes les paraboles et hyperboles (à l'exception d'une seule). Nous en décrivons le principe sur l'exemple de la parabole $y^2 = x$, sans utiliser les notations et le langage de Fermat.

Pour calculer l'aire sous la parabole entre O et x , Fermat choisit sur l'axe des points d'abscisses x , ex , e^2x , e^3x , ... où e est un nombre inférieur à 1 (cf. fig. 5). En ces points, il élève les ordonnées et y construit des rectangles, dont il calcule les aires en utilisant ce qu'il appelle « *propriété spécifique* » de la parabole (c'est-à-dire, pour nous, son équation $y^2 = x$). L'aire du premier rectangle $X'XPP'$ est égale à la différence entre les aires du rectangle $OXPY$ de base x et de hauteur \sqrt{x} et du rectangle $OX'P'Y'$ de base ex et de hauteur \sqrt{ex} et vaut donc

$$x \cdot \sqrt{x} - ex \cdot \sqrt{ex} = x\sqrt{x}(1 - e).$$

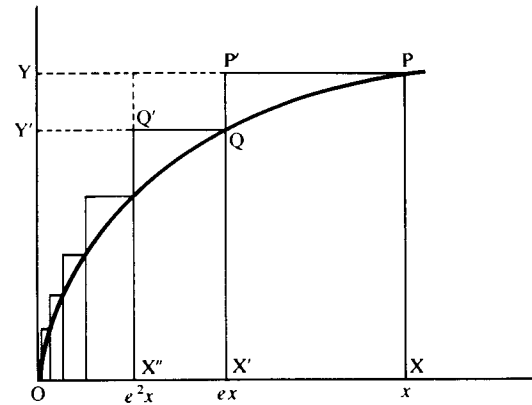


Fig. 5

De façon analogue, l'aire du second rectangle $X'X'QQ'$ vaudra

$$ex \cdot \sqrt{ex} - e^2x \cdot \sqrt{e^2x} = ex\sqrt{ex}(1 - e).$$

Les aires des rectangles formeront alors une progression géométrique infinie de raison $e\sqrt{e}$. Or, les savants médiévaux des écoles d'Oxford et de Paris, et surtout Grégoire de Saint-Vincent, avaient réussi à calculer la somme de séries infinies. Fermat s'en inspire pour déterminer la somme des aires des rectangles :

$$\begin{aligned} S &= x\sqrt{x} \cdot (1 - e) + ex\sqrt{ex}(1 - e) + e^3x\sqrt{x}(1 - e) + \dots \\ &= x\sqrt{x}(1 - e)(1 + e\sqrt{e} + e^3 + \dots)^1 \\ &= \frac{x\sqrt{x}(1 - e)}{1 - e\sqrt{e}} = \frac{x\sqrt{x}(1 - \sqrt{e})(1 + \sqrt{e})}{(1 - \sqrt{e})(1 + \sqrt{e} + e)} = \frac{x\sqrt{x}(1 + \sqrt{e})}{1 + \sqrt{e} + e} \end{aligned}$$

Pour trouver l'aire sous la courbe, il ne suffit pas d'y inscrire un nombre infini de rectangles, mais encore faut-il que l'aire de chacun de ces rectangles soit infiniment petite. Fermat y parvient en posant $e = 1$. La somme des aires rectangulaires sera : $S = \frac{x\sqrt{x}(1 + \sqrt{e})}{1 + \sqrt{e} + e} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$.

Elle sera égale à l'aire cherchée. Aujourd'hui, nous noterions ce résultat : $\int_0^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x^{3/2}$

Dès le premier tiers du XVII^e, des géomètres comme Cavalieri, Torricelli et Roberval avaient déjà établi par des méthodes diverses l'équivalent du résultat $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ pour n rationnel différent de -1 , résultat connu par

1. La somme d'une progression géométrique de raison q , $q < 1$, $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$, est égale à $\frac{1}{1 - q}$.

Archimède pour $n = 1$ et 2, par les Arabes pour $n = 1/2$ et 4. Ils l'exprimaient sous forme géométrique, dans le langage des indivisibles : la somme des lignes d'un triangle vaut la moitié du carré de la ligne la plus longue (pour $n = 1$). La méthode de Fermat décrite ci-dessus est plus générale et contient les éléments essentiels de la définition de l'intégrale définie pour les fonctions continues, sauf que Fermat ne reconnaît pas l'opération « intégrale » qui y est à l'œuvre (cf. encadré 5); il ne fait que calculer une aire particulière. Il ne

5. L'intégrale définie

L'intégrale définie de f , fonction réelle continue sur l'intervalle $[0, a]$ dans \mathbb{R} , notée $\int_0^a f(x) dx$, est la limite des sommes

$$\sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f(t_i), \quad \text{où } x_i \leq t_i \leq x_{i+1}$$

et où les x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ définissent une subdivision

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = a$$

de l'intervalle $[0, a]$, lorsque n tend vers l'infini et que le plus grand des réels $x_{i+1} - x_i$ tend vers zéro.

pense pas explicitement non plus en termes de limite alors que la sommation des aires d'une infinité de rectangles équivaut à un passage à la limite.

Le procédé de Fermat constitue un réel progrès par rapport aux autres puisqu'il applique systématiquement le nouveau point de vue de la géométrie analytique, dont il est le créateur avec Descartes (cf. chapitre 4, page 135). La géométrie analytique introduit la notion de système de coordonnées et associe à toute courbe une équation reflétant les propriétés de la courbe. Le symbolisme littéral introduit par François Viète avait permis de traduire les problèmes géométriques en termes d'équations algébriques. Fermat, connaissant bien les travaux de Viète, tente de poser les problèmes de quadrature sous forme algébrique, ce qui donne à ses procédés un caractère plus général et permet de développer le côté algorithmique de l'analyse infinitésimale.

Blaise Pascal (1623-1662), tout en perfectionnant les méthodes de quadrature de ses prédécesseurs, a sous-estimé l'importance des nouveaux procédés analytiques. Ses travaux se situent dans la tradition géométrique (Archimède, Cavalieri, Torricelli) et en constituent en quelque sorte le point culminant. Pascal s'oppose très nettement pourtant à la conception de Cavalieri, elle aussi géométrique, et il remplace les arguments intuitifs de Cavalieri par des raisonnements arithmétiques sur les séries. Ainsi, dans sa quadrature de la parabole, Pascal construit des rectangles sur des abscisses choisies en progression arithmétique (de distance d), calcule leurs aires $d \cdot (nd)^2$ et détermine leur somme S :

$$\begin{aligned} S &= d \cdot d^2 + d \cdot (2d)^2 + d \cdot (3d)^2 + \dots + d \cdot (nd)^2 \\ &= d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \dots + n^2 d^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d^3(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\ &= d^3 \cdot \left[\frac{n}{6} (n+1)(2n+1) \right] \\ &= d^3 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right). \end{aligned}$$

Si le nombre des rectangles augmente indéfiniment, Pascal s'autorise à négliger les termes $\frac{n^2}{2}$ et $\frac{n}{6}$ par rapport au premier et la somme des aires des rectangles équivaudra à $S = \frac{d^3 n^3}{3} = \frac{(nd)^3}{3} = \frac{x^3}{3}$. Cette omission de termes a son origine dans le parallèle établi par Pascal entre les points de vue géométrique et arithmétique, qui lui fait comparer l'indivisible géométrique au zéro arithmétique. Ce parallèle va devenir systématique dans les méthodes infinitésimales de la seconde moitié du XVII^e siècle.

Le problème des tangentes

Si les problèmes de quadrature ont une origine très ancienne, les tangentes ne seront étudiées qu'au milieu du XVII^e siècle. La conception de la tangente dans l'Antiquité — une droite qui ne touche la courbe qu'en un seul point — est de portée pratique restreinte et, hormis quelques constructions isolées, comme celles de la tangente à la spirale d'Archimède et celles des tangentes aux coniques d'Apollonius, elle n'a pas débouché sur une méthode générale.

La méthode élaborée par Archimède pour construire la tangente à la spirale se nourrit de considérations cinématiques. Elle a été étendue, au XVII^e siècle, dans les travaux de Torricelli et dans ceux de Roberval sur le mouvement des projectiles. A l'image d'Archimède, qui définit la spirale comme le lieu d'un point qui parcourt avec une vitesse constante une demi-droite, qui tourne elle-même autour d'une de ses extrémités avec une vitesse angulaire constante, Torricelli et Roberval considèrent les courbes engendrées par la composition de deux mouvements, dont on connaît les vitesses. La vitesse résultante sera la diagonale du parallélogramme des vitesses des deux mouvements qui engendrent la courbe (cf. fig. 6). La droite

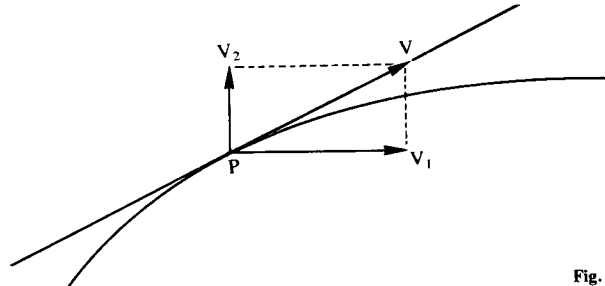


Fig. 6

ayant la direction de la diagonale sera la tangente à la courbe au point P. Cette *méthode dynamique* permet de déterminer les tangentes à beaucoup de courbes, mais la définition de la tangente qui y opère repose sur des concepts physiques et n'est pas applicable à toutes les courbes. Vers le milieu du siècle, les recherches d'une *méthode générale* des tangentes se multiplient.

Celle de Fermat (1629) détermine la longueur de la sous-tangente TQ (cf. fig. 7) en utilisant la «*propriété spécifique*» de la courbe. Soit PSR une

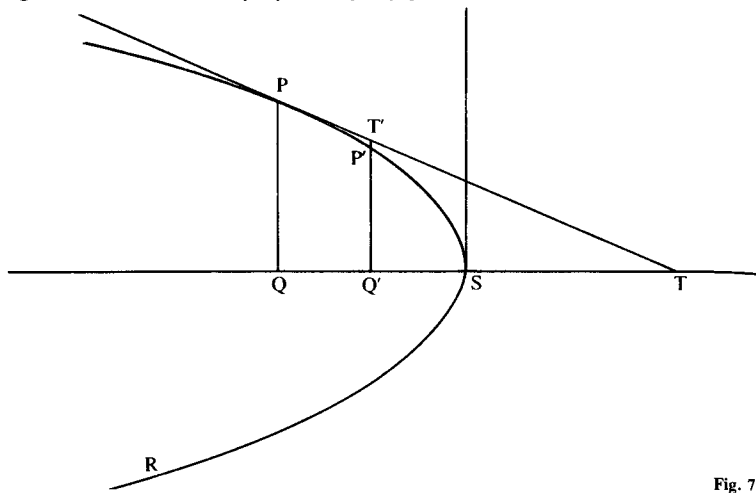


Fig. 7

parabole de sommet S et de diamètre SQ et soit P le point «*par lequel il faut mener la droite [PT] tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en T*».

La «*propriété spécifique*» (resp. l'équation) de la parabole s'écrit $\frac{QS}{Q'S} = \frac{PQ^2}{P'Q'^2}$ (resp. $y^2 = 2px$). Comme le point T est extérieur à la parabole, $P'Q' < T'Q'$ et $\frac{QS}{Q'S} > \frac{PQ^2}{T'Q'^2}$. Mais $\frac{PQ}{T'Q'} = \frac{QT}{Q'T}$ à cause de la similitude des triangles PTQ et

$T'Q'Q'$. Donc $\frac{QS}{Q'S} > \frac{QT^2}{Q'T^2}$. Or le point P est donné, donc l'ordonnée PQ, le point Q et l'abscisse QS. Soit donc $QS = d$ donnée. Si l'on pose la quantité cherchée $QT = a$ et l'accroissement $QQ' = e$, on aura :

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 - 2ae + e^2}$$

En multipliant les moyens par les extrêmes et en retranchant les termes communs, il vient $-2aed + e^2d > -ea^2$.

Fermat divise alors par e et obtient $-2ad + ed > -a^2$, ou $de + a^2 > 2ad$. En supprimant le terme contenant e , l'inégalité se transforme en égalité et fournit le résultat cherché $a = 2d$; a étant connu, on peut placer T et tracer la tangente PT.

La définition sous-jacente à cette méthode décrit la tangente comme position limite d'une sécante lorsque les points d'intersection avec la courbe tendent à se rapprocher. C'est la définition qu'on utilise aujourd'hui pour placer les tangentes aux courbes. Pour déterminer la tangente en x_0 à la courbe représentative d'une fonction f , on commencera par donner un accroissement Δx à la variable x , qu'on laissera dans la suite tendre vers zéro. Ce n'est pas en termes de fonction et de limite que pensait Fermat, mais plutôt en termes d'équations et d'infiniment petits. Il est le premier à considérer des infiniment petits numériques et non plus géométriques et, au lieu de les faire tendre vers zéro, il les pose d'emblée égaux à zéro.

René Descartes (1596-1650) a sévèrement critiqué l'usage trop libre que fait Fermat des éléments infinitésimaux, et une âpre dispute s'est développée entre les deux hommes. Elle a permis à Fermat de clarifier et d'étendre sa méthode. Vers 1640, il déclare qu'«*il est permis de substituer aux ordonnées des courbes celles des tangentes*» et, en 1660, il établit l'équivalence des deux infiniment petits : élément d'arc et élément de tangente. Grâce à la généralité de ce principe, Fermat peut placer la tangente à de nombreuses courbes, qu'elles soient algébriques ou transcendentes, comme la cycloïde.

Dès 1637, Descartes était en possession d'une méthode qui ne s'appliquait qu'aux courbes algébriques. En 1638, il détermine la tangente à la cycloïde en utilisant un procédé reposant sur la notion de centre instantané de rotation et évitant le langage des infiniment petits.

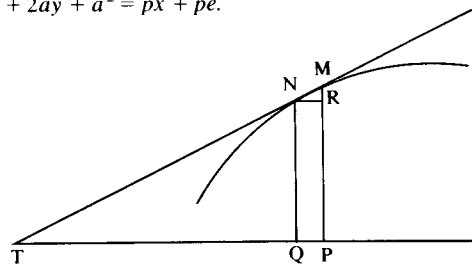
En Angleterre, où l'usage des séries infinies était très répandu, les méthodes analytiques de Descartes et de Fermat rencontrent un grand succès et contribuent à renforcer la *tendance à l'arithmétisation* qui se développe surtout dans l'œuvre de John Wallis (1616-1703) et dans celle de James Gregory (1638-1675).

En réaction à cette tendance, Isaac Barrow (1630-1677), le prédécesseur d'Isaac Newton à la chaire de mathématiques de l'université de Cambridge, souhaite dans ses cours revenir au point de vue géométrique et à la rigueur euclidienne. Il développe une méthode des tangentes «*par le calcul*», qui est plus générale que celle de Fermat et qui s'approche davantage encore des procédés modernes. Il utilise l'équation de la courbe, $y^2 = px$ pour la parabole (cf. fig. 8), y remplace x par $x + e$ et y par $y + a$; d'où :

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe.$$

Fig. 8

Le triangle NMR est appelé *triangle caractéristique*.



Il écarte alors tous les termes contenant des puissances supérieures de a et de e ou leur produit; il vient :

$$2ay = pe \quad \text{et} \quad \frac{a}{e} = \frac{p}{2y}.$$

Or $\frac{a}{e} = \frac{MP}{TP}$, à cause de la similitude des triangles MRN et MPT. Comme MP

est l'ordonnée du point M, la proportion $\frac{MP}{TP} = \frac{p}{2y}$ permet de calculer la longueur de la sous-tangente TP.

L'analogie avec les procédés de dérivation modernes est évidente. Barrow donne un accroissement e à la variable x ($= TQ$), et un accroissement a à la variable y ($= QN$), exprime a en fonction de e en utilisant l'équation de la courbe $y = f(x)$, puis supprime tous les termes contenant des puissances de a ou de e ou leur produit. Si l'arc MN est indéfiniment petit, il l'identifie au petit bout de tangente et le triangle MRN des accroissements respectifs sera semblable au triangle MPT (cf. encadré 6). Mais substituer Δx à e et Δy à a , c'est trahir le raisonnement de Barrow, qui se fait en termes géométriques et n'utilise guère les notions de variable et de fonction nécessaires à l'introduction des accroissements Δx et Δy .

Le lien entre les quadratures et les tangentes

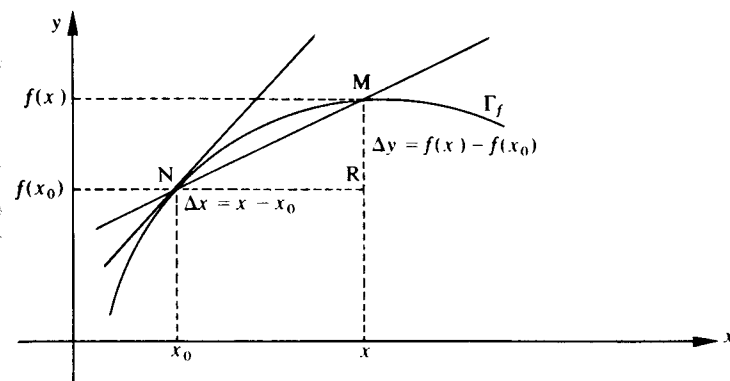
Vers le milieu du siècle, les mathématiciens acquièrent une maîtrise de plus en plus grande dans la manipulation des notions qui sont à la base du calcul infinitésimal. Les nouvelles techniques qu'ils inventent et améliorent deviennent de plus en plus opératoires. Ainsi le calcul des aires curvilignes a progressivement donné naissance à une méthode de quadrature contenant tous les éléments de la définition de l'intégrale comme limite d'une somme. L'étude du mouvement — nécessitant le calcul de la vitesse instantanée, la distance parcourue en fonction du temps étant connue — et la recherche des tangentes aux courbes contiennent en germe les notions de taux de variation et de dérivée. L'émergence de ces notions permet également de résoudre les problèmes de maximum et de minimum et d'aborder la rectification des courbes.

Avant 1650, personne ne croyait que la longueur d'une courbe puisse être rigoureusement égale à la longueur d'une droite. Mais peu après, William Neil, C. Wren — l'architecte qui reconstruisit Londres après le grand incendie de 1666 — et Roberval réussirent à calculer la longueur d'une arche de cycloïde. Après ce premier exploit, d'autres rectifications sont effectuées.

Ces différents problèmes relevant du calcul différentiel et intégral sont étudiés séparément, même si des liens ont été remarqués dans quelques cas particuliers. Torricelli et Fermat ont vaguement pressenti le lien entre le problème des quadratures et celui des tangentes. J. Gregory l'a mis en évidence dans sa *Geometriae* (1668), mais cet ouvrage a été très peu diffusé et n'a pas pu exercer une influence. I. Barrow est le premier à reconnaître clairement que le problème des tangentes est l'inverse du problème des quadratures, et vice versa. Aucun de ces auteurs n'a reconnu la généralité et l'importance du lien qui fait aujourd'hui l'objet du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Celui-ci permet de calculer les intégrales (limites

6. La dérivée

Si f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , on appelle *dérivée* de f au point x_0 dans I et on note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ la limite, si elle existe, de $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, quand x tend vers x_0 , $x \neq x_0$.



Pour $x \neq x_0$, le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la sécante NM. Si M tend vers N, la sécante NM a une position limite qui est la *tangente en N* à la courbe représentative Γ_f de f . Sa pente sera

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

de sommes) en cherchant des primitives², c'est-à-dire en inversant les opérations de dérivation. L'équivalent de ce théorème se trouve chez Barrow, mais sa lourde formulation géométrique, qui évite soigneusement tout recours aux procédés analytiques de Descartes et de Fermat, le rend totalement inopérant.

Fermat et Barrow ont frôlé de très près la découverte des méthodes générales qui font du calcul infinitésimal une branche autonome des mathématiques. Alors que Fermat possédait des méthodes analytiques équivalentes à la dérivation et à l'intégration, Barrow a su reconnaître le lien

2. La fonction F dérivable dans un intervalle $I = [a, b]$ dans \mathbb{R} est une *primitive* de la fonction f continue dans I si dans I la dérivée de F est égale à f . Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral s'énonce alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

fondamental entre les deux problèmes, mais le langage géométrique qu'il avait adopté ne lui permettait pas d'en expliciter toutes les possibilités. Souvent lourdes, parfois confuses, les multiples anticipations de la notion de limite au XVII^e siècle ont en tout cas permis d'accumuler de nombreux résultats de calcul différentiel et intégral.

10. La création du calcul infinitésimal

Depuis le début du XVII^e siècle, les méthodes infinitésimales ayant proliféré et les résultats s'étant multipliés, la nécessité de les rassembler et de les ordonner s'est imposée. Cet effort de systématisation est l'œuvre d'Isaac Newton (1642-1727), homme de science anglais, et de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), juriste, philosophe et homme politique allemand. Indépendamment l'un de l'autre, ils inventent des procédés algorithmiques commodes et reconnaissent les liens entre des problèmes apparemment isolés. C'est dans la mesure où la généralité de leurs méthodes et de leurs techniques fait de l'analyse infinitésimale une branche autonome, indépendante de la géométrie, que Newton et Leibniz peuvent être considérés comme les fondateurs du calcul différentiel et intégral.

Isaac Newton

Étudiant au collège de la Trinité à Cambridge, où il apprit à connaître les œuvres de Descartes, de Galilée, de Wallis et de Barrow, Newton dut interrompre ses études entre 1665 et 1666 à cause de la peste, qui sévissait alors dans la région de Londres. Ces deux années de loisir forcées furent très créatrices; c'est en effet à cette époque que Newton posa les fondements de sa mécanique et de son optique et conçut les principes clés de la *théorie des fluxions*. De retour à Cambridge, Newton succéda bientôt (en 1669) à Barrow dans la chaire de mathématiques, qu'il conserva jusqu'en 1695. Épuisé nerveusement, déprimé, il décida alors de renoncer à la recherche et accepta un poste à la Monnaie de Londres.

Les écrits de Newton sur le calcul infinitésimal ne sont qu'un nombre de trois. Ils ne furent publiés qu'au début du XVIII^e siècle et ne purent avoir qu'une influence restreinte. Newton, qui avait une crainte maladive des critiques, hésita toute sa vie à publier les résultats de ses recherches. Une première et courte mention de sa théorie des fluxions parut en 1687 dans un ouvrage de mécanique, les *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, qui eut, lui, un retentissement considérable. Les propositions sur les vitesses, les accélérations, les tangentes et les courbures, établies en termes géométriques dans cet ouvrage, ont fortement motivé Newton dans ses recherches sur le calcul infinitésimal. Pendant un siècle au moins, elles stimuleront la création de nouveaux procédés analytiques nécessaires pour résoudre les problèmes généraux qui y sont abordés.

On trouve dans l'œuvre de Newton trois conceptions différentes du calcul infinitésimal.

La conception infinitésimale

La conception initiale influencée par Barrow et Wallis³ est *infinitésimale*: Newton opère avec des quantités infiniment petites qu'il appelle *moments* et qui sont équivalentes aux accroissements infinitésimaux de Fermat. Il utilise également des moments d'aire et sa méthode de quadrature en dépend. Il suppose l'aire d'une surface limitée par la courbe représentative d'une fonction f , les axes de coordonnées et l'ordonnée y du point d'abscisse x donnée et considère le moment d'aire, c'est-à-dire l'accroissement oy de l'aire lorsque l'abscisse x croît d'une quantité infinitésimale notée o (cf. fig. 9). Il calcule le taux de variation instantanée de l'aire au point d'abscisse x , c'est-à-dire la dérivée, et constate qu'il est égal à l'ordonnée y du point d'abscisse x de la courbe.

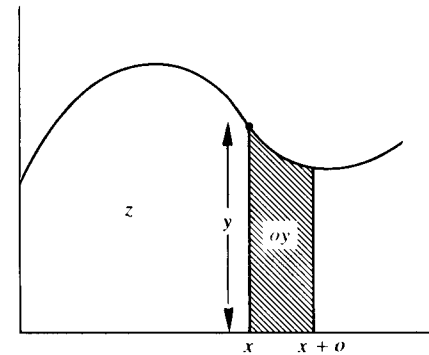


Fig. 9

Ainsi, si l'aire donnée s'exprime par $z = \frac{n}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$, son taux de changement sera $y = ax^{\frac{m}{n}}$.

Inversement, Newton détermine l'aire sous la courbe dont l'équation $y = f(x)$ est donnée en inversant les opérations de *dérivation*, c'est-à-dire en calculant l'intégrale indéfinie de f . Il n'additionne plus des surfaces infinitésimales comme dans les procédés antérieurs, mais place la dérivée au centre de sa démarche. Il privilégie l'intégrale indéfinie au détriment de l'intégrale définie. Dès 1669, le lien entre les quadratures et les dérivées est clairement établi par Newton. Mais on chercherait vainement chez Newton des définitions claires des notions de dérivée et d'intégrale, ni même des moments ou accroissements infinitésimaux (fantômes de quantités disparues, comme disaient ses plus virulents critiques contemporains).

3. Telle qu'elle apparaît dans *De analysis per aequationes numero terminorum infinitas*, composé en 1669, publié en 1711.

La méthode des fluxions

Quelques années plus tard (en 1671), Newton se désolidarise des quantités infiniment petites et introduit dans la *Méthode des fluxions et des suites infinies* (publiée en 1736) sa méthode la plus fameuse. Il y considère les quantités mathématiques comme engendrées «*par une augmentation continue, à la manière de l'espace que décrit un corps en mouvement*» et imagine «*les vitesses des mouvements qui les engendrent*». Ces vitesses seront appelées «*fluxions*». Pour fonder sa méthode sur des bases solides, Newton s'inspire du modèle de la mécanique théorique et introduit le temps comme variable universelle de toute correspondance fonctionnelle. Il ne s'intéresse pas au temps en tant que tel, mais à son écoulement uniforme. Il introduit les notions de fluentes et de fluxions dans les termes suivants :

«*J'appellerai quantités fluentes, ou simplement fluentes ces quantités que je considère comme augmentées graduellement et indéfiniment, je les représenterai par les dernières lettres de l'alphabet v, x, y et z... et je représenterai par les mêmes dernières lettres surmontées d'un point \dot{v} , \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit et que par conséquent on peut appeler Fluxions.*»

Il énonce clairement les problèmes fondamentaux du calcul : «*Étant donné la relation des quantités fluentes, trouver la relation de leurs fluxions. Et inversement.*»

Newton explique sa solution du problème direct sur divers exemples. Appliquée à $y = x^n$, sa démarche est la suivante : Si o est «*un intervalle de temps infiniment petit*», $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$ seront les accroissements infiniment petits de x et de y . Pour trouver la relation entre \dot{x} et \dot{y} , Newton remplace, dans $y = x^n$, x par $x + \dot{x}o$ et y par $y + \dot{y}o$. Donc,

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n.$$

Newton développe le membre de droite en série infinie à l'aide de la *formule du binôme*⁴ :

$$y + \dot{y}o = x^n + n\dot{x}x^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}o^2\dot{x}^2x^{n-2} + \dots,$$

retranche $y = x^n$ et divise par o ,

$$\dot{y} = n\dot{x}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o\dot{x}^2x^{n-2} + \dots$$

et néglige tous les termes contenant encore o ; finalement,

$$\dot{y} = n\dot{x}x^{n-1}.$$

4. Formule indiquant le développement de $(x + y)^n$, où $n \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n,$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

L'introduction de la notion de fluxion ne modifie que très peu la conception infinitésimale initiale.

La méthode des premières et dernières raisons

Dans *Quadratura curvarum* (écrit en 1676, publié en 1704), Newton tente d'éliminer toute trace d'infiniment petit, d'abord en ne considérant que leurs rapports, puis en concevant ce qui sera la troisième méthode, «*la méthode des premières et dernières raisons*». Il procède comme ci-dessus, notant toutefois o le moment noté précédemment $\dot{x}o$, mais, au lieu de négliger sans justification valable les termes contenant encore o , Newton forme le rapport de la variation de x à celle de y , puis laisse o s'évanouir dans ce rapport. Le résultat — le rapport de 1 à nx^{n-1} — est ce que Newton appelle «*la dernière raison des variations évanouissantes*»; il le pose égal à la première raison des variations naissantes, et c'est le rapport des fluxions.

Pour expliquer sa «*dernière raison*» — *grosso modo* la limite —, Newton a recours à une analogie avec la mécanique et prend l'image de la vitesse finale d'un corps arrivant à une certaine position. Par vitesse finale, il n'entend ni la vitesse avant que le corps ne soit arrivé à sa position finale et que le mouvement cesse, ni celle après, mais exactement celle avec laquelle le corps arrive à la position finale et avec laquelle le mouvement s'arrête.

Les différentes étapes du procédé de Newton correspondent à la formation de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(cf. encadré 7). Le passage suivant tiré des *Principia* éclaire le rapprochement entre la méthode newtonienne et notre conception de la dérivée : «*Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement les rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'en approchent toujours; et vers lesquelles ils peuvent s'en approcher aussi près que toute différence donnée, mais dont ils ne peuvent jamais les dépasser ou atteindre avant que les quantités soient diminuées indéfiniment.*»

La méthode des fluxions, même fondée sur la méthode des premières et dernières raisons, reste insuffisante pour mettre le calcul différentiel sur des bases rigoureuses. Elle est toujours tributaire d'une autre méthode, soit celle des quantités infiniment petites, soit celle des limites. L'idée newtonienne d'un rapport limite traduit l'influence de Barrow préconisant le retour au modèle euclidien et porte la marque de sa conception du nombre comme rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce qu'on regarde comme unité. La lecture du Livre V d'Euclide est ici manifeste dans le fait que Newton ne considère jamais la fluxion d'une quantité, mais toujours le rapport de deux fluxions.

Newton innove en faisant de l'emploi des séries infinies une méthode générale et une technique d'intégration. Il développe les fonctions en séries

7. Méthode des fluxions et calcul de la dérivée

Parallèle entre la méthode des fluxions de Newton et le calcul de la dérivée exposée sur l'exemple de la fonction $f : x \rightarrow x^n$.

Newton	Calcul de la dérivée
$y = x^n$	$y = f(x)$
x en variant devient $x + o$	h est un accroissement de la variable x
$y = x^n$ deviendra $(x + o)^n =$	$f(x + h)$ est la nouvelle valeur de la fonction.
$x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$	
à cause de la formule du binôme.	
L'accroissement de y sera	La variation de f sera
$(x + o)^n - x^n = nox^{n-1}$	$f(x + h) - f(x)$.
$+ \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$	
L'accroissement de x , o , est à l'accroissement de y , $nox^{n-1} +$	Le taux de variation est
$\frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$ comme 1 est à	$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
$nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$	
Si les accroissements s'évanouissent, leur rapport sera 1 : nx^{n-1} .	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

infinies et intègre terme à terme, étendant la validité de l'intégration terme à terme aux sommes infinies alors qu'il ne l'a démontrée que pour les sommes finies. On chercherait en vain des considérations de convergence, mais force est de constater que Newton déploie une remarquable intuition dans ce domaine. Ainsi il utilise

$$y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

pour des x suffisamment petits et

$$y = \frac{1}{x^2+1} = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \dots$$

pour x grand.

L'apport de Leibniz

Bien que de nature très différente, la contribution de Leibniz à la création du calcul infinitésimal n'est pas moins importante. Après des études de droit

et de philosophie, Leibniz s'engage au service de l'électeur de Mayence et fait partie (en 1672) d'une mission diplomatique à la cour de Louis XIV. Pendant son séjour à Paris, Leibniz fait la connaissance de Christian Huygens (1629-1695), pensionnaire de l'Académie des sciences, nouvellement créée, qui lui révèle l'étendue de son ignorance dans le domaine des mathématiques et qui l'initie à l'étude des œuvres de Cavalieri, Roberval, Pascal, Descartes, Gregory et Wallis. En 1676, Leibniz quitte Paris pour poursuivre sa carrière politique au service de l'électeur de Hanovre.

Trop investi dans la politique allemande pour avoir le loisir d'écrire de longs traités mathématiques, Leibniz publie son calcul différentiel, fragmentaire, dans une série d'articles brefs parus à partir de 1684 dans les *Acta eruditorum*, journal scientifique fondé avec son soutien en 1682 à Leipzig. Beaucoup de ses résultats n'ont jamais été publiés et se trouvent consignés dans un journal dans lequel Leibniz notait ses découvertes au fur et à mesure qu'il les faisait. Ces notes étant incomplètes et confuses, il est difficile de suivre l'évolution des idées de Leibniz sur le calcul différentiel.

Leibniz prétend, trente ans plus tard, avoir tiré sa première inspiration de la lecture d'un passage du *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal sur le triangle caractéristique (cf. fig. 8). Il réalise que la recherche de la tangente à la courbe dépend du rapport des « différences » des ordonnées et des abscisses lorsqu'elles deviennent infiniment petites et que la quadrature dépend de la somme des ordonnées ou rectangles infiniment minces élevés sur des intervalles infinitésimaux de l'axe des abscisses. Dès 1673, Leibniz identifie le problème inverse des tangentes au problème des quadratures.

Différences et sommes

Dans les notes de 1675, il commence à développer systématiquement ses idées à partir de considérations combinatoires. Dans sa thèse *De arte combinatoria* (1666), il avait étudié la suite des carrés,

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \\ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \\ 2, 2, 2, 2, 2,$$

formé les premières différences ainsi que les secondes qui sont constantes.

Leibniz avait constaté que la somme des premières différences est égale au dernier terme de la suite des carrés.

Pour établir le lien avec le calcul infinitésimal, Leibniz interprète la suite des nombres comme une suite de valeurs d'une fonction et la différence entre deux nombres comme la différence entre deux valeurs voisines de la fonction, différence qu'il note l . Abrégeant le latin *omnia*, il utilise *omn.* pour noter la somme. La propriété ci-dessus s'écrit alors $omn. l = y$. Bientôt, Leibniz préférera dy à l et \int , un S de *summa* stylisé, à *omn.* La relation ci-dessus devient $\int dy = y$. Cette notation élégante et commode, qui s'est conservée jusqu'à aujourd'hui, lui permet d'élaborer une méthode formelle pour calculer les sommes et les différences des infinitésimaux.

Dans la première publication leibnizienne sur le calcul différentiel, *Nova methodus pro maximis et minimis...* (1684), le problème des tangentes amène

Leibniz à considérer le triangle formé par une partie infiniment petite de la tangente et les portions infiniment petites des parallèles à l'abscisse et à l'ordonnée, qui l'avait frappé à la lecture de Pascal, et à le traiter comme un élément caractéristique de la courbe (cf. fig. 8). Ses trois côtés infinitésimaux demeurent parfaitement déterminés par la similitude du triangle infiniment petit NRM au triangle TNQ (formé par la sous-tangente TQ, l'ordonnée QN et la longueur de la tangente TN). Même si dy et dx sont des quantités

arbitrairement petites, leur rapport $\frac{dy}{dx}$ a une valeur finie, à savoir celle du rapport $\frac{NQ}{QT}$ de l'ordonnée à la sous-tangente. Cela fournira une définition de la différentielle : dx étant une quantité quelconque, la différentielle dy est définie par $dy/dx = y/$ sous-tangente. Cette définition, pour être rigoureuse, nécessite une expression de la sous-tangente. Or la définition leibnizienne de la tangente, droite reliant deux points infiniment proches, n'est pas satisfaisante.

Leibniz indique ensuite les règles pour $d(x + y)$, $d(xy)$, $d\left(\frac{x}{y}\right)$, $d(x^n)$

dans l'ordre même dans lequel on expose les règles de l'algèbre, manifestant ainsi son intention de créer une véritable « algèbre des infiniment petits ». Il applique ces règles à la recherche des tangentes, aux maxima et minima et aux points d'inflexion. Plus tard, Leibniz ajoutera les différentielles des fonctions logarithmes et exponentielles et étudiera la courbure à l'aide du cercle osculateur. Il introduira également des différentielles d'ordre supérieur (d^2x , par exemple) et négligera, dans les calculs, celles d'ordre supérieur à 1 ; c'est là un trait caractéristique de la méthode leibnizienne.

Ainsi Leibniz fonde son « calcul » sur la notion de différentielle. Sans doute cette démarche n'est-elle pas étrangère à sa recherche, en philosophie, de « monades », substances indivisibles et simples. Le calcul des différences est donc l'opération fondamentale du calcul leibnizien. La *sommation* est l'opération inverse et, parfois, on peut, par simple lecture, déduire un tableau d'intégrales d'un tableau de différentielles. Leibniz pense les aires et les volumes comme sommes d'éléments infinitésimaux, mais calcule la valeur des sommes en inversant les opérations de dérivation. Contrairement à Newton, qui considère l'intégrale indéfinie et calcule les aires et les volumes à partir de leur taux de variation, Leibniz introduit l'intégrale définie⁵. Ces deux conceptions différentes de l'intégrale se sont d'ailleurs conservées dans le calcul intégral élémentaire.

Le formalisme leibnizien

Ce qui fait la force de la méthode leibnizienne, c'est la simplicité de son algorithme, sa notation élégante, son formalisme opératoire qui permet d'effectuer quasi-automatiquement les calculs, masquant la nature des objets

5. Jusqu'en 1690, Leibniz parle de calcul sommatoire. Sur les conseils de Jacques Bernoulli, il préfère ensuite employer l'expression *calcul intégral* pour indiquer qu'on recherche le tout à partir de la différence, de la partie.

en jeu. Si Leibniz adjoint au système des grandeurs usuelles les infiniment petits, leur statut reste quand même très flou. Leibniz oscille entre une attitude formaliste et un appui sur des analogies géométriques.

Désireux d'éliminer la nature métaphysique des infiniment petits, il les considère comme de simples auxiliaires au même titre que les nombres imaginaires en analyse. En l'absence de définitions rigoureuses, il interprète parfois aussi les infiniment petits en termes de variations instantanées, comme Newton.

L'idée fondamentale est l'incomparabilité. Pour Leibniz, points, lignes, surfaces sont incomparables : on n'ajoute rien à une droite, par exemple, en lui adjoignant un point. Ainsi, par rapport à x , dx « se conduit » comme un point par rapport à une ligne. Notons que Leibniz travaille dans un ensemble de grandeurs — formé des nombres réels auxquels il a ajouté les différentielles — qui n'est plus archimédien.

Leibniz suggère que les quantités infinitésimales sont inférieures à toute quantité donnée, que ce sont des quantités privées de grandeur qui, grâce à un vague principe de continuité, conservent le caractère des relations entre les quantités finies dont elles proviennent. Comme Newton, il est tenté également de ne pas considérer les éléments infinitésimaux, mais leurs rapports. L'identification des rapports à des nombres n'étant toujours pas accomplie, la conception restrictive du nombre est en partie responsable du fait que le concept de limite ne peut se dégager des théories newtoniennes et leibniziennes. Il faut attendre la construction des nombres réels pour pouvoir définir les différentielles comme limites de suites infinies de nombres.

En dépit de la généralité des méthodes, de l'algèbrisation des calculs, le calcul différentiel et intégral ne repose toujours pas sur des bases solides. Les concepts fondamentaux comme ceux de limite, de dérivée et d'intégrale ne sont pas définis.

11. Fuite en avant

Le calcul infinitésimal étant né dans le dernier tiers du XVII^e siècle sous les traits de la *méthode des fluxions* de Newton, d'une part, et sous ceux du *calcul différentiel* de Leibniz, d'autre part, on ne s'étonnera guère de voir ces deux conceptions s'opposer et diviser les mathématiciens contemporains en deux écoles : l'école anglaise et l'école continentale. Les vives controverses qui se sont développées entre Newton et Leibniz sur la priorité de la découverte ont exacerbé les passions et pressé les savants de prendre parti pour ou contre l'un ou l'autre des protagonistes.

L'école anglaise (Berkeley, Maclaurin, Taylor, Simpson, Landen) tente avec ténacité de clarifier les notions qui servent de base à la méthode des fluxions, d'éliminer les difficultés philosophiques liées à l'ambiguïté du statut des éléments infinitésimaux, tantôt nuls, tantôt inassignables, souvent confondus avec les fluxions et jugés inconciliables avec l'intuition géométrique, à laquelle les analystes anglais donnent toujours la prééminence.

L'école continentale se caractérise plutôt par une tendance à lier le calcul

différentiel à l'idée de fonction, dont Euler allait faire un concept fondamental des mathématiques (cf. chapitre 6). La compacité des notations de Leibniz, l'efficacité de ses algorithmes, favoriseront, sous l'impulsion du point de vue formaliste d'Euler, un développement quasi automatique du calcul différentiel, même si les mathématiciens font parfois encore appel à la philosophie pour justifier la notion d'infiniment petit.

Le calcul différentiel s'est rapidement diffusé grâce en partie à la vaste correspondance de Leibniz avec ses contemporains, les Bernoulli notamment. Cette famille de mathématiciens bâlois contribue largement au développement du nouveau calcul en l'enrichissant et en améliorant ses notations. Inspiré d'un petit traité de calcul différentiel écrit par Jean Bernoulli, l'ouvrage du marquis de l'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), joue un rôle considérable dans la popularisation des méthodes du calcul leibnizien.

Confiant dans la validité des résultats obtenus dans divers domaines, et en mécanique surtout, occultant l'absence de fondements solides, les mathématiciens du XVIII^e siècle étendent les méthodes du calcul différentiel et intégral afin de pouvoir les appliquer aux fonctions de plus en plus compliquées qu'exige la résolution des problèmes complexes de physique que se posent alors les savants.

La mathématisation progressive de la physique, l'investissement du calcul infinitésimal dans l'analyse des phénomènes naturels, sont à l'origine de l'écllosion de nouvelles branches des mathématiques :

- l'étude des phénomènes mécaniques et physiques en général se traduit par l'établissement d'équations différentielles, dont l'intégration sera l'objet d'un nouveau domaine de l'analyse;

- la mathématisation de la mécanique, de l'hydrodynamique et de la théorie de l'élasticité est le principal moteur du développement du calcul des variations;

- l'étude des courbes et des surfaces nécessite des techniques différentielles qui sont à l'origine de la géométrie différentielle.

Toutes ces branches sont issues d'un tronc commun, le calcul infinitésimal, et leur développement constituera l'objet des recherches mathématiques du XVIII^e siècle. Le calcul s'élargit par la diversification de ses applications, mais la difficulté de définir les notions fondamentales reste entière. Presque tous les mathématiciens de ce siècle s'y essaient, mais leurs efforts sont vains.

12. Essais de fondement

Leonhard Euler

Un des points du calcul infinitésimal sujets aux critiques les plus virulentes est celui de la nature des infiniment petits. Les mathématiciens du XVII^e siècle cherchaient à légitimer l'existence de ces quantités évanouissantes par des considérations métaphysiques. Leonhard Euler (1707-1783), qui

est le mathématicien dominant du siècle, rejette la métaphysique, ainsi d'ailleurs que la géométrie, comme base du nouveau calcul. Il lui consacre les *Institutiones calculi differentialis* (1755) et les *Institutiones calculi integralis* (1768-1770), véritable somme des travaux et des résultats rassemblés dans ce domaine. L'angle sous lequel il y aborde les infiniment petits est celui du formaliste, confiant dans les symboles, essayant de clarifier les règles plutôt que d'élucider la nature des objets sur lesquels elles opèrent.

Pour Euler, une quantité infiniment petite est une quantité évanouissante et, dès lors, actuellement égale à zéro. Comment justifier alors que le rapport de deux quantités évanouissantes $\frac{dy}{dx}$, qui signifie pour lui $\frac{0}{0}$, puisse avoir une valeur bien définie? La réponse d'Euler est simple et naïve, puisqu'il déduit de la propriété $n \cdot 0 = 0$ pour tout nombre n , que $n = \frac{0}{0}$.

Voici comment il calcule le rapport des accroissements de la fonction $y = x^2$ et de la variable :

$$\text{si } x \text{ augmente de } \omega, y \text{ croît de } (x + \omega)^2 - x^2 = 2x\omega + \omega^2$$

et le rapport des accroissements vaut $2x + \omega$. Ainsi, quand l'accroissement de x s'évanouit, celui de x^2 , s'évanouit également, et pourtant le rapport de ses deux quantités nulles a une valeur assignable, à savoir $2x$. Euler étudie systématiquement les fonctions élémentaires et obtient de manière analogue le rapport des accroissements de la fonction et de la variable. La

détermination de ces derniers ou la recherche des valeurs des expressions $\frac{0}{0}$ est alors l'objet du calcul différentiel. Celui-ci codifie les règles pour calculer les différentielles des fonctions, qui, bien qu'elles-mêmes nulles, ont des rapports mutuels bien déterminés.

Euler considère l'intégration comme l'inverse de la dérivation et utilise les techniques d'intégration de Newton (développement des fonctions en séries infinies et intégration terme à terme).

Il applique avec succès le calcul infinitésimal à l'étude de nombreux problèmes physiques. Ceux-ci réclament souvent des techniques compliquées, qu'Euler contribue à développer. Ses travaux de mécanique le poussent à s'intéresser aux équations différentielles du second ordre, les problèmes d'élasticité l'amènent à résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Jean le Rond d'Alembert

D'Alembert décrit son approche du calcul infinitésimal principalement dans les articles qu'il rédige en sa qualité de rédacteur scientifique de l'*Encyclopédie* ou *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, vaste projet d'organisation des savoirs témoignant des préoccupations intellectuelles des penseurs des Lumières. Il rejette définitivement l'idée atomiste de l'existence d'infiniment petits statiques en interprétant la différentielle, « quantité infiniment petite ou moindre que toute grandeur

assignable » comme « la différence infiniment petite de deux grandeurs finies, dont l'une surpasse l'autre infiniment peu ». L'objet du calcul différentiel est « la manière de différentier les quantités, c'est-à-dire de trouver la différence infiniment petite d'une quantité finie variable ». D'Alembert tente de le fonder sur la méthode des limites. C'est ainsi qu'il appelle la méthode des premières et dernières raisons de Newton. « Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différentié des quantités, mais seulement des équations; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, et que la différentiation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme. » On voit que la dérivée n'est plus rapport de quantités infinitésimales, mais limite d'un rapport de quantités non nulles. Dans l'article *Limite*, il prétend que « la notion de limite est la vraie métaphysique du calcul différentiel » et s'efforce de donner une idée satisfaisante de la notion de limite, une quantité étant limite d'une autre lorsque la seconde pourra approcher la première d'aussi près qu'on voudra, mais ne réussit pas à le faire sous une forme logiquement cohérente.

Joseph-Louis Lagrange

Lagrange (1736-1813) se propose lui aussi de développer « la vraie métaphysique des principes du calcul différentiel et intégral ». C'est l'objet de deux ouvrages issus de son enseignement à l'École normale et à l'École polytechnique, nouvellement créées : la *Théorie des fonctions analytiques* (1797) et les *Leçons sur le calcul des fonctions* (1808).

Lagrange y critique et rejette la méthode des infiniment petits de Leibniz, celle des rapports de zéro à zéro d'Euler, la méthode des limites de d'Alembert et celle des fluxions de Newton. La tentative de Lagrange vise à réduire le calcul infinitésimal à l'algèbre, ainsi que l'indique explicitement le titre de l'ouvrage de 1797, « contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies ».

Les notions mises en œuvre sont celles de fonction — essentiellement celle de fonction continue au sens d'Euler (cf. chapitre 6, page 223) — et de série. Simples généralisations de polynômes, les séries infinies sont pour Lagrange du domaine de l'algèbre et il opère avec elles comme avec des expressions algébriques.

Le développement en série des fonctions lui permettra de construire, d'une manière purement algébrique et formelle, à partir d'une fonction donnée (dite « primitive ») d'autres fonctions (dites dérivées). Le terme « dérivée » s'est maintenu dans la littérature mathématique, ainsi d'ailleurs que la notation f' , f'' , etc. des fonctions dérivées successives de la fonction f .

Lagrange part du fait que toute fonction $f(x)$ d'une variable quelconque x , quant à la place de x , on y substitue $x + i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, peut être développée en série

$$f(x + i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \dots$$

Les coefficients p , q , r , ... des puissances de i seront de nouvelles fonctions de x , dérivées de la fonction primitive $f(x)$ et indépendantes de la quantité i .

Soucieux d'établir l'existence de ce développement pour les fonctions les plus générales, il prétend la démontrer *a priori*, mais les arguments qu'il développe sont insuffisants. Il se contente d'écarter quelques cas négligeables (ceux où quelque dérivée de la fonction devient infinie en un point isolé ou ceux où fonction et dérivées de la fonction sont). Quant à la convergence de ces séries, Lagrange se trompe lorsqu'il écrit qu'« on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent ».

Pour Lagrange, « le calcul différentiel, considéré dans toute sa généralité, consiste à trouver directement, et par des procédés simples et faciles, les fonctions p , q , r , ... dérivées de la fonction f ; et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction f par le moyen de ces dernières fonctions ».

Il indique la loi de formation des fonctions dérivées en montrant d'abord qu'on peut dériver $2q$ de p , $3r$ de q , etc., en appliquant le même algorithme que celui qui permet de dériver p de $f(x)$. Sa démonstration repose exclusivement sur la manipulation algébrique des séries entières et la dérivation des fonctions devient « une nouvelle opération d'algèbre ».

Pour calculer p , Lagrange néglige tous les termes du développement à partir du troisième.

Il vient $f(x + i) - f(x) = pi$; d'où $p = \frac{f(x + i) - f(x)}{i} = f'(x)$. De manière

analogue, $q = \frac{f''(x)}{2!}$, $r = \frac{f'''(x)}{3!}$, etc. Il en découle que :

$$f(x + i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{2!}i^2 + \dots$$

(formule de Taylor).

Lagrange applique son calcul des fonctions à la dérivation des fonctions élémentaires (x^m , a^x , $\log_a x$, $\cos x$, $\sin x$).

Il est conscient de la nécessité de démontrer la convergence des séries lorsqu'on ne veut plus simplement engendrer des fonctions dérivées, mais utiliser le développement en série pour calculer la valeur de la fonction. Grâce à des encadrements du reste de la série qu'on néglige, Lagrange fournit un moyen de déterminer les limites de l'erreur qu'on commet. Cette détermination des limites est, comme dit Lagrange, « d'une grande importance dans l'application de la théorie des fonctions à l'analyse des courbes et à la mécanique ».

Lagrange a-t-il réussi à exclure toute métaphysique de l'infini? En se plaçant dans un cadre purement formel — et en cela il se situe dans le droit fil de la rigueur eulérienne —, il a évacué les notions d'infiniment petit et de limite. Mais, pour passer du formel au numérique — des séries formelles aux séries convergentes —, « il convient précisément d'adoindre à ce point de vue (des séries formelles) le concept de limite » (Ovaert).

Citons encore la vaste synthèse des travaux d'analyse du XVIII^e siècle réalisée par Sylvestre François Lacroix (1765-1843) dans son *Traité du calcul différentiel et intégral* (1797), qui annonce déjà le retour vers la rigueur caractérisant le XIX^e siècle.

13. L'élucidation des concepts de base

Au début du XIX^e siècle, le désir d'asseoir les mathématiques sur des fondements solides devient quasi général et la nécessité d'élucider les concepts de base⁶ de l'analyse se fait pressante. Ainsi les analystes reconnaissent le bien-fondé de la démarche de Lagrange, qui, par son orientation théorique, tranche sur celle de ses prédécesseurs. Même si le développement des fonctions en séries de Taylor est généralement rejeté comme base du calcul différentiel et intégral, le traité de Lagrange contribue, avec les travaux d'Euler, à faire de la fonction le concept central du calcul. Les mathématiciens ne cesseront plus de s'interroger sur la nature de la fonction en général et de la fonction continue en particulier. Newton avait évité ce questionnement en s'appuyant sur l'intuition du mouvement uniforme, Leibniz avait déjà proposé une définition de la fonction (cf. chapitre 6, page 217) et avait évoqué un principe de continuité.

Le logicien et mathématicien tchèque Bernard Bolzano (1781-1848) a le premier une conception claire des notions de base du calcul infinitésimal (continuité, dérivée, lien entre continuité et dérivabilité), mais ses travaux passent inaperçus pendant un demi-siècle environ.

C'est le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) qui se fera le principal artisan de l'introduction de la rigueur dans le calcul infinitésimal. Il s'y attache dans trois ouvrages parus successivement entre 1821 et 1829 : le *Cours d'analyse* (1821), le *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) et les *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). Le concept de limite y apparaît comme fondamental. Sa définition, tout en reprenant l'idée de d'Alembert, rompt définitivement avec la conception géométrique qui y était encore sous-jacente et fait de la limite un concept arithmétique. Voici sa définition : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. » A la lumière des concepts de limite, de variabilité et de fonction, Cauchy clarifie la notion d'infiniment petit, qui n'est plus qu'une suite convergente ayant zéro pour limite : « On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. » La dérivée d'une fonction continue $y = f(x)$ est définie elle aussi en termes de limite. C'est la limite, lorsqu'elle existe, du rapport des différences $[f(x+i) - f(x)]/i$ lorsque i s'approche de la limite zéro.

Précisons qu'une fonction dérivable en un point y est continue, mais que la réciproque n'est pas vraie. Le lien entre continuité et dérivabilité ne sera pas explicité dans les travaux de Cauchy. Le problème ne sera clairement formulé qu'à partir du mémoire de Dirichlet (1829) sur le développement des fonctions en séries trigonométriques (cf. chapitre 6, page 228).

Après avoir défini la dérivée, Cauchy établit son lien avec les

différentielles de Leibniz : Si dx est une quantité finie quelconque, la différentielle dy d'une fonction $y = f(x)$ sera simplement $f'(x)dx$. Les quantités dx et dy sont donc définies par la seule propriété d'avoir un rapport égal à la dérivée $f'(x)$.

Pour clarifier le lien entre le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des accroissements et la dérivée

$f'(x)$, il démontre la formule des accroissements finis, $\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$, où $0 < \theta < 1$. Sa démonstration utilise la continuité de la dérivée $f'(x)$ dans l'intervalle Δx .

14. Une première théorie de l'intégration

Newton et Leibniz avaient élaboré deux conceptions différentes de l'intégrale. Celle de Newton avait surtout fait usage de l'intégrale indéfinie et considéré l'intégration comme l'opération inverse de la différentiation. Ce point de vue avait prévalu pendant tout le XVIII^e siècle. Leibniz avait interprété les aires et les volumes comme sommes de rectangles et de cylindres, ce qui l'avait amené à utiliser l'intégrale définie. Cauchy, qui donnera le premier une définition précise de l'intégrale (1823), adhérera à cette deuxième conception.

Cauchy souligne la nécessité de démontrer l'existence des intégrales « avant de faire connaître leurs diverses propriétés ». Son point de départ est une fonction f réelle, continue dans un intervalle $[x_0, X]$. Les éléments $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = X$ de l'intervalle subdiviseront celui-ci en n sous-intervalles. Cauchy forme alors la somme

$$S = (x - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

puis il démontre que la limite de S , lorsque la longueur du plus grand sous-intervalle tend vers zéro, existe⁷ si f est continue sur $[x_0, X]$, « limite qui dépendra uniquement de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x . Cette limite est ce qu'on appelle une intégrale définie. » Pour la désigner, Cauchy utilise la notation $\int_{x_0}^X f(x) dx$, « imaginée par M. Fourier ».

Cauchy définit $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, où x appartient à l'intervalle $[x_0, X]$, et montre à l'aide du théorème des accroissements finis que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $[x_0, X]$. Cette proposition établit le lien entre l'intégration et la dérivation, et c'est donc encore chez Cauchy qu'on trouve une première démonstration du théorème fondamental du calcul infinitésimal.

L'intégrale de Cauchy s'étend à des fonctions continues par morceaux (fonctions bornées ayant un nombre fini de discontinuités sur l'intervalle d'intégration). En effet, soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ possédant une

7. La démonstration rigoureuse exige la notion de continuité uniforme, que Cauchy ne possédait pas. Mais une fonction réelle continue sur $[a, b]$, a et b réels, est uniformément continue sur $[a, b]$.

6. Voir aussi « L'effort de rigueur » (chapitre 6, page 225).

discontinuité au point c de $[a, b]$. Cauchy définit alors l'intégrale généralisée :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx.$$

Parmi les applications de l'intégrale définie, Cauchy démontre la formule de Taylor. Il considère la série

$$f(x), \frac{h}{1!} f'(x), \dots, \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \dots$$

et affirme qu'elle sera convergente et aura pour somme la fonction

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots$$

toutes les fois que l'intégrale

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x+z) dz = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

convergera pour des valeurs croissantes de n , vers la limite zéro.

Cauchy a clairement exprimé la place qu'il comptait donner au théorème de Taylor : « ... je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant pas être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la Mécanique analytique (Lagrange) a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes... »

A la suite de Cauchy, la plupart des analystes choisiront la limite comme base du calcul infinitésimal.

Souvenons-nous que les méthodes infinitésimales avaient été introduites en partie pour calculer des aires curvilignes, des longueurs d'arcs de courbe, des volumes, etc., notions intuitivement claires pour les géomètres. Fidèle à son idéal de rigueur, Cauchy croit nécessaire de les définir et il le fait en termes d'intégrales, ce qui restreint considérablement l'étendue de ces notions. En effet, les formules intégrales imposent un certain nombre de conditions restrictives aux fonctions concernées. Ainsi la longueur s d'un arc de la courbe représentative de $y = f(x)$ est déterminée par

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

qui présuppose la dérivabilité de f . Le problème de la généralisation des notions de longueur, d'aire ou de volume sera posé plus tard (cf. chapitre 6, page 243).

15. La rigueur weierstrassienne

L'analyste allemand Karl Weierstrass (1815-1897) va pousser plus loin encore l'effort de rigueur entrepris par Bolzano et Cauchy. Il va réduire davantage le rôle de l'intuition en quantifiant leurs définitions. S'interrogeant sur le sens à attacher à une expression comme « une variable s'approche indéfiniment d'une valeur fixe », qui suggère le temps et le mouvement, il essaie de la traduire en inégalités arithmétiques. Il aboutit à la définition en termes de δ et ϵ de la variation infiniment petite de la variable et de la fonction : « S'il est possible de déterminer une borne δ telle que, pour toute valeur de h plus petite en valeur absolue que δ , $f(x+h) - f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ϵ , aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction. » Les définitions modernes de la limite et de la continuité en découlent immédiatement. Weierstrass, pour clarifier les méthodes de l'analyse, préconise l'introduction d'un formalisme arithmétique précis (voir l'encart 8 du chapitre 6). Il a su donner à l'analyse la forme, à peu de chose près, qu'elle a aujourd'hui.

16. La construction des nombres réels

La réforme de l'analyse, qui a son origine dans les travaux de Bolzano et de Cauchy et se cristallise autour de ceux de Weierstrass, entreprend de bâtir l'ensemble de l'analyse sur l'arithmétique, c'est-à-dire sur le nombre. Or, dans cette seconde moitié du XIX^e siècle, une théorie des nombres réels fait toujours défaut. Depuis qu'Euclide avait tenté dans sa théorie des proportions du Livre V de donner un statut aux grandeurs incommensurables, personne n'avait plus senti le besoin de définir le nombre, et cela en dépit des extensions successives de cette notion.

Soucieux donc, dans son cours de calcul différentiel à l'université de Berlin, de mettre l'analyse sur des bases rigoureuses, Weierstrass s'aperçoit le premier de l'absence de fondement logique de l'arithmétique et essaie aussitôt d'y remédier.

Sa construction des nombres réels qui se situe vers 1863 ne reste pas isolée : l'année 1872 marque la publication de deux autres théories des nombres irrationnels, celle de Georg Cantor et d'Eduard Heine et celle de Richard Dedekind, conçue dès 1858 et publiée dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuité et nombres irrationnels). Elles ont été précédées par la parution en 1869 de la construction de Charles Méray, proche de celle de Cantor.

La « création » des nombres irrationnels par Dedekind

Comme pour Weierstrass, c'est l'obligation d'exposer le calcul différentiel et intégral à des étudiants qui fit réfléchir R. Dedekind (1831-1916) « jusqu'à ce qu'il trouve des fondements purement arithmétiques,

et tout à fait rigoureux, aux principes de l'analyse infinitésimale». Il prend l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels comme point de départ. Il déclare en 1876 : « Je suppose comme base, à propos de laquelle on doit naturellement s'être entendu, l'Arithmétique des nombres rationnels, supposée bien fondée, et rien d'autre; je montre dans mon ouvrage que, sans immixtion de choses étrangères, on peut constater dans le domaine des nombres rationnels un phénomène qui peut être employé à compléter ce domaine par une création unique de nombres irrationnels. »

Le phénomène dont parle Dedekind, c'est la coupure. Guidé par l'intuition géométrique qu'un point M d'une droite partage les points de celle-ci en deux classes, la classe des points situés à droite de M et celle des points situés à gauche de M , Dedekind appelle « coupure » (C_1, C_2) de \mathbb{Q} une partition de \mathbb{Q} en deux classes C_1 et C_2 non vides et disjointes telles que tout nombre de la première C_1 soit strictement inférieur à tout nombre de la seconde C_2 .

Les coupures déterminées par un nombre rationnel — comme par exemple (C_1, C_2) où C_1 est l'ensemble des nombres rationnels inférieurs à 7 et C_2 l'ensemble des nombres rationnels supérieurs ou égaux à 7 — possèdent la propriété suivante : où bien il existe un plus grand élément dans C_1 , où bien il existe un plus petit élément dans C_2 (7 dans l'exemple ci-dessus). Inversement, une coupure possédant cette propriété détermine un nombre rationnel.

Or on constate rapidement l'existence de coupures n'ayant pas cette propriété. Dedekind en donne un exemple célèbre : C_1 contient l'ensemble des nombres rationnels négatifs plus les nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2 et C_2 tous les autres nombres rationnels. Un plus grand élément x dans C_1 (un plus petit élément dans C_2) devrait satisfaire $x^2 = 2$, ce qui est impossible dans \mathbb{Q} et il ne peut y avoir de plus grand élément dans C_1 (de plus petit élément dans C_2). Dedekind poursuit : « Nous créons avec une telle coupure un nouveau nombre irrationnel a , complètement déterminé par cette coupure. Nous dirons que le nombre a correspond à la coupure (C_1, C_2) ou encore qu'il crée cette coupure. » Dans l'exemple, $a = \sqrt{2}$ correspond à la coupure (C_1, C_2). A toute coupure correspond désormais un nombre, et un seul, rationnel ou irrationnel.

Dedekind définit une relation d'ordre entre les coupures et vérifie quelques propriétés qui font de \mathbb{R} un corps totalement ordonné.

Il montre ensuite que le domaine des nombres réels est « inextensible », c'est-à-dire qu'en répétant l'opération (qui a permis de construire \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q}), on ne trouve que \mathbb{R} . Cette propriété — dans laquelle nous reconnaissons le caractère complet de \mathbb{R} — peut s'exprimer comme suit : Si C_1 et C_2 sont deux sous-ensembles de \mathbb{R} , non vides, disjoints, dont la réunion est \mathbb{R} et tels que tout élément de C_2 est strictement supérieur à tout élément de C_1 , alors il existe un et un seul nombre réel qui est inférieur ou égal à tout élément de C_1 et supérieur ou égal à tout élément de C_2 .

Dedekind se sert de cette propriété pour caractériser un domaine continu (totalement ordonné) de grandeurs : « Si l'on sépare toutes les grandeurs d'un domaine constitué de façon continue en deux classes telles que toute grandeur de la première classe est plus petite que toute grandeur de la seconde classe,

alors il existe ou bien dans la première classe une grandeur qui est la plus grande, ou bien dans la seconde classe une grandeur qui est la plus petite. »

Historiquement, c'est la première définition du continu, et c'est en cela que réside la grande originalité de Dedekind.

La construction des nombres réels reposant sur celle des nombres entiers et des nombres rationnels ne s'acheva cependant qu'avec la définition axiomatique de l'ensemble \mathbb{N} par G. Peano (1889).

L'évolution de l'infini mathématique, qui s'inscrit en filigrane dans les pages de ce chapitre, trouvera un aboutissement dans le cadre de la théorie des ensembles infinis, que nous rencontrerons au chapitre suivant (page 241)⁸.

8. On trouvera quelques indications bibliographiques à la fin du chapitre 6, page 245

6. Le concept de fonction et le développement de l'analyse

L'idée de *relation* entre des quantités est aussi ancienne que les mathématiques. Mais quel a été le cheminement qui conduit de cette acception très vague à la conception ensembliste contemporaine d'une « *fonction-application* » qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble? Et quelles ont été les différentes représentations de la notion de fonction, concept qui gouverne le développement de l'analyse?

1. L'âge de l'Antiquité

Le premier âge de l'idée de fonction est celui de l'Antiquité. Nous avons vu les mathématiciens babyloniens user largement de tables sexagésimales de réciproques, de carrés, de racines carrées, de cubes, de racines cubiques et quelques autres. Des tables étaient utilisées en astronomie, en particulier pour la compilation des éphémérides du soleil, de la lune et des planètes.

Chez les Grecs, les tentatives attribuées aux pythagoriciens pour déterminer les lois les plus simples de l'acoustique sont typiques de la recherche d'interdépendance quantitative entre diverses quantités physiques comme les hauteurs des sons émis par des cordes pincées et les longueurs de celles-ci. Plus tard, durant l'époque alexandrine, les astronomes dressèrent, à l'aide de théorèmes de géométrie et de règles d'interpolation, des tables donnant les longueurs des cordes de cercles de rayon fixé, ce qui équivaut à dresser des tables de sinus. La plus ancienne parmi celles dont on dispose aujourd'hui se trouve dans l'*Almageste* de Ptolémée.

Peut-on dire, si l'on considère une fonction comme une *correspondance* très générale entre un certain nombre de valeurs, par exemple représentant le temps, et d'autres valeurs, par exemple des positions angulaires dans le système planétaire, que l'idée de fonction est représentée chez Ptolémée ou dans les tables astronomiques babyloniennes? Ce serait aller trop vite en besogne. Certes, une similitude entre ces correspondances tabulaires antiques et la conception moderne s'impose. Mais avant que, dans la théorie des ensembles, l'idée intuitive de quantité variable ne soit réduite à celle d'un ensemble de quantités constantes, donné préalablement, encore fallait-il que

la quantité variable et la loi de variation soient exhibées comme des objets mathématiques. Et cela ne sera pas acquis avant le XVII^e siècle.

Les tables astronomiques antiques ne sont conçues que comme des relations entre des ensembles discrets et finis de quantités constantes, prises isolément, dans un but principalement pratique et numérique.

On aurait pu penser que l'idée de changement quantitatif et celle de mouvement local, toutes deux présentes dans la *Physique* d'Aristote, auraient pu trouver une représentation commune dans une notion plus abstraite de quantité variable. Or elles n'ont pas été un objet d'étude mathématique chez les Grecs, dont par ailleurs ni la mécanique ni l'astronomie n'ont vraiment dépassé le mouvement uniforme.

Quant aux idées proprement cinématiques qui seront essentielles pour le développement de l'idée de fonctionnalité, elles sont pourtant présentes, en particulier dans la définition de la spirale par Archimède ou de l'hélice cylindrique par Apollonius, etc., mais ce ne sont pas elles qui opèrent réellement dans les démonstrations, telles qu'elles nous ont été transmises, des propriétés de ces courbes. Ainsi Archimède les contourne, à l'aide de la méthode d'exhaustion, pour déterminer la tangente à sa spirale.

Si on considère la mathématique grecque dans son ensemble, nous avons indiqué que ses procédures de détermination et de calcul de limites particulières, même chez Archimède, ne conduisent pas à une formulation explicite des notions de suite, de variable, d'infiniment petit... On doit admettre que, dans l'Antiquité, il n'y a pas d'idée générale de fonctionnalité.

Dans l'état encore partiel de connaissance des manuscrits arabes, on ne peut apprécier les développements nouveaux de cette question dans les mathématiques arabes. Le nombre de fonctions utilisées augmente et, en particulier, chacune des lignes trigonométriques est introduite, leurs méthodes d'étude se diversifient, les tables sont perfectionnées et complétées par de nouvelles méthodes d'interpolation. On a vu que les géomètres-algébristes, et Sharaf Al-Din Al-Tusi en particulier, avaient progressé dans l'étude de certaines courbes du 3^e degré et cherchaient à déterminer leurs maxima en utilisant une expression correspondant à la dérivée première des polynômes (*cf.* chapitre 3).

2. Les écoles d'Oxford et de Paris

Une mention particulière doit être faite, dans ce processus de maturation, des écoles de philosophie naturelle d'Oxford et de Paris. Ces écoles, qui furent surtout florissantes au cours du XIV^e siècle, ont en effet commencé de considérer les mathématiques comme l'instrument privilégié de connaissance des phénomènes naturels.

Leur grand mérite fut de chercher à quantifier certaines qualités ou phénomènes tels la chaleur, la densité, la vitesse, etc., en leur prêtant des « *degrés d'intensité* » pouvant varier « continûment » à l'intérieur de certaines limites, et l'on assiste à un remarquable effort pour ramener cette intensité des qualités et des formes à une échelle de grandeurs mesurables. Ainsi,

Nicole Oresme (1320-1382) écrira : « *Chaque chose mesurable, à l'exception des nombres, est imaginée comme une quantité continue.* »

Roger Bacon (1214-1294) a l'idée de représenter par une ligne verticale l'échelle des intensités dont est susceptible une qualité. Mais la difficulté réside justement dans le fait qu'au niveau de la quantification des lois ces théoriciens de l'intensité des formes ne peuvent calculer que sur des nombres entiers considérés encore, comme du temps des Grecs, en tant qu'architecture d'unités, et non sur des mesures. Pour rendre compte de l'échelle continue des grandeurs mesurables dont ils ont l'intuition, ils doivent s'exprimer strictement dans le langage des proportions du Livre V des *Éléments* d'Euclide.

Ainsi Thomas Bradwardine (1290-1349) cherche dans son *Tractatus proportionum* de 1328 une relation satisfaisante entre la vitesse d'un mouvement, la force qui le provoque et la résistance qui tend à le freiner. Il commence par récuser une loi de type $V = \frac{F}{R}$ car, dit-il, si la force est égale ou légèrement inférieure à la résistance, il n'y a pas de mouvement, V pourtant reste supérieur à zéro.

Il n'admet pas non plus $\frac{V_2}{V_1} = (F_2 - R_2) - (F_1 - R_1)$

ni
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{F_2 - R_2}{F_1 - R_1}$$

et propose la loi : la vitesse suit la proportion de la force à la résistance. Indiquons que depuis les Grecs et jusqu'au XVIII^e siècle, la terminologie des rapports est en quelque sorte logarithmique de celle que l'on utilise aujourd'hui. Si, par exemple, r_1 est le rapport de A à B et r_2 celui de B à C, le rapport de A à C était appelé somme des deux premiers, alors qu'il vaut $r_1 r_2$. La loi de Bradwardine veut dire que le rapport force/résistance ne doit pas être multiplié par n mais élevé à la puissance n pour produire une vitesse n fois plus grande; ce qu'on peut traduire aujourd'hui par $nV = \text{Log} \left(\frac{F}{R} \right)^n$.

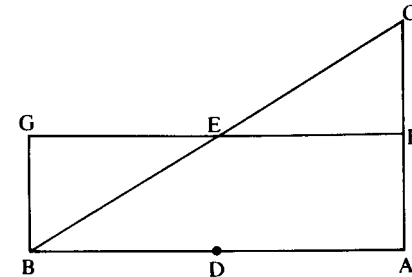
Les écoles d'Oxford et de Paris ont les notions de mouvement (*motus*), de vitesse (*latitudo motus* ou *velocitadis*), d'accélération (*latitudo acquisitionis latitudinis motus*), d'instantanéité et distinguent le mouvement local uniforme, seul à être imaginé dans la doctrine aristotélicienne, du « *mouvement uniformément difforme* », c'est-à-dire uniformément accéléré. William Heytesbury et Richard Swineshead établissent entre 1330 et 1350 que « *toute qualité variant d'une manière uniformément difforme correspond à son degré moyen* ».

Dans le cas où cette qualité est la vitesse, Nicole Oresme (ca 1323-1382) va donner une démonstration géométrique de ce résultat : en un temps donné, un mobile parcourt d'un mouvement uniformément accéléré le même espace qu'un second mobile ayant une vitesse constante et égale à la moyenne entre les vitesses extrêmes du premier. Pour cela, il fait appel à une représentation graphique, une des premières, de la relation fonctionnelle qui lie le temps et la vitesse (cf. encadré 1).

Moment théorique relativement important, donc, que celui-ci où l'on

1. Représentation d'un mouvement uniformément accéléré

Nicole Oresme (entre 1348 et 1362)



Il porte les temps sur une ligne horizontale AB (*longitudo*) et les vitesses instantanées parallèlement à la ligne perpendiculaire AC, au-dessus des points correspondants de AB.

Si D est le milieu de AB et F le milieu de AC, la surface du rectangle AFGD mesure l'espace parcouru par le second mobile, puisque $DE \times AB$ est le produit de la vitesse par le temps.

L'aire du triangle BAC donne la distance parcourue par le premier mobile. Or elle est égale à l'aire de BAFG.

commence à envisager les lois de la nature comme des lois de type fonctionnel et où s'effectuent des échanges entre pensée mathématique et considérations cinématiques. Car, comme le dit Bourbaki, « *toute cinématique repose sur l'idée intuitive de quantité variable avec le temps, c'est-à-dire fonction du temps* ».

3. De l'étude des mouvements à celle des trajectoires

Mais enfin, quelle que soit l'importance de ces écoles de philosophie naturelle, l'interprétation vraiment élargie et enrichie de la fonctionnalité se situe au début du XVII^e siècle.

Deux éléments sont décisifs dans cette transformation qui va se caractériser par la prédominance d'une nouvelle représentation de la règle fonctionnelle, la représentation par une *formule*, les représentations antérieures devenant rapidement très secondaires.

Le premier élément est la création de l'algèbre littérale symbolique qui permet enfin après Viète (1591) de noter, sous forme ramassée et maniable, une expression algébrique comprenant des quantités inconnues et des coefficients arbitraires. Le symbolisme de Viète a connu bien des amendements et des transformations (Descartes, Newton, Leibniz, plus tard Euler, etc.) mais, presque immédiatement, il permet un bond en avant du calcul mathématique.

L'autre élément est la nouvelle conception des mathématiques comme langage exprimant les réalités physiques de la nature et résumée dans la formule de Galilée de 1623, dans *El Saggiatore* : « *Le grand livre de l'univers... est écrit en langage mathématique.* »

Au début du XVII^e siècle, en effet, l'énoncé des lois de Kepler sur les trajectoires elliptiques des planètes va orienter l'intérêt de tous ceux qui se préoccupent de mathématiques vers le problème de calcul et d'étude de trajectoires. Les lois de Kepler, si elles sont progressivement acceptées, ne sont considérées que comme approchées : elles ne tiennent pas compte des perturbations dues aux autres planètes. Le développement de l'astronomie a aussi des objectifs pratiques liés à la navigation terrestre : meilleure connaissance du mouvement apparent de la lune, détermination des longitudes, etc. L'autre grand sujet, mis en avant par Galilée, est l'étude des trajectoires de projectiles en mouvement à la surface de la Terre, elle-même considérée comme au repos.

Citons la formulation de la loi de la chute des corps dans le *Discours concernant deux sciences nouvelles*, de Galilée : « *Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps.* » La relation entre l'espace et le temps s'exprime dans la théorie des proportions : on évolue dans un domaine général de grandeurs qui regroupe à la fois les intervalles de temps et ceux d'espace. Elle est très nettement pensée comme une règle fonctionnelle.

Le fait que l'étude des mouvements soit au premier rang des sujets traités par les savants a eu le résultat suivant : la plupart des fonctions introduites au XVII^e siècle ont été d'abord étudiées comme des courbes, celles-ci étant elles-mêmes considérées comme trajectoires de points en mouvement.

4. L'exemple de la fonction logarithme

Le cas de la fonction logarithme vaut la peine qu'on s'y attarde. C'est la première fonction transcendante, mises à part les lignes trigonométriques bien connues des Arabes, à être introduite par différents mathématiciens, tous préoccupés de calculs astronomiques. Elle marque très clairement le moment où s'effectue le tournant entre les diverses représentations de la notion de fonction.

La relation entre une progression géométrique des puissances d'un même élément (par exemple q, q^2, q^3, \dots) et la progression arithmétique des exposants était déjà connue d'Archimède. Elle fut redécouverte par Stifel en 1544, qui note aussi que, si l'on multiplie deux éléments de la progression géométrique, on obtient un élément dont l'exposant est la somme des termes correspondants de la progression arithmétique.

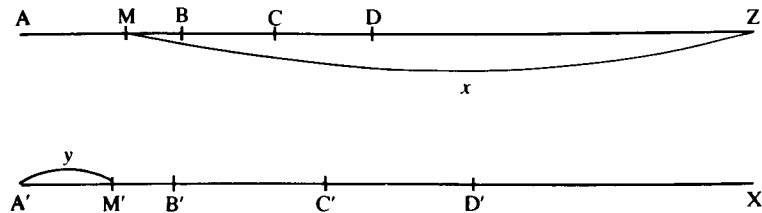
John Napier (1550-1617), ou Néper, reprit cette idée, en voulant simplifier les calculs trigonométriques. La définition des logarithmes de Néper, dont le travail fut publié en 1614 et 1619, concerne le logarithme d'un sinus. Pour cela, il utilise une comparaison entre deux mouvements

2. Le logarithme de Néper

M et M' sont deux mobiles qui se déplacent suivant des trajectoires parallèles : le segment AZ et la droite A'X.

M a une vitesse proportionnelle à sa distance au point Z, k étant le coefficient de proportionnalité.

Si l'on suppose que dans un court intervalle de temps t , les distances AB, BC, CD, DE, etc., sont parcourues à vitesse constante sur chacun de ces intervalles,



$$\begin{aligned} \text{alors } DZ &= CZ - CD \\ &= CZ - kCZt = (1 - kt)CZ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } CZ &= (1 - kt)BZ = (1 - kt)^2AZ \\ DZ &= (1 - kt)^3AZ. \end{aligned}$$

On obtient une progression géométrique de rapport $1 - kt$.

Au moment du départ du mobile M, part un mobile M' sur A'X qui, lui, a une vitesse uniforme, égale à celle de M au départ, c'est-à-dire $v = k \cdot AZ$.

Les distances A'B', A'C', A'D' parcourues par M' pendant les intervalles de temps $t, 2t, 3t, \dots$ sont donc en progression arithmétique

$$A'B' = k(AZ \cdot t), \quad A'C' = 2k(AZ \cdot t), \quad \text{etc.}$$

Pour Néper A'B' est égal au logarithme de BZ, de même A'C' est le logarithme de CZ.

Avec les notations de la figure, $y = \text{logarithme de } x$; il prendra

$$k = 1, \quad AZ = 10^7 \quad \text{et} \quad A'B' = 1, \quad A'C' = 2, \quad A'D' = 3 \dots$$

Il obtient : des sinus en progression géométrique décroissante à partir du sinus total (égal à 10^7) ont des logarithmes en progression arithmétique croissante à partir de zéro.

rectilignes, l'un d'un point M, dont la vitesse est supposée proportionnelle à la distance qui le sépare d'un point fixe Z, l'autre d'un point M' se déplaçant uniformément. Dans ce cas, la distance parcourue par le point M' est le logarithme au sens de Néper de la distance qui sépare M de Z (cf. encadré 2).

Voici ses termes : « *Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime avec une grande approximation la ligne qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement*

dans le sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps et au commencement avec la même vitesse.» (*Mirfici Logarithmorum Canonis Descriptio* 1614.)

Ici aussi, il s'agit du langage des rapports d'Euclide et, à proprement parler, le logarithme au début est un nombre entier ou fractionnaire, parce que les calculs ne peuvent toujours se faire que sur ces nombres. Mais, en fait, il est la mesure aussi approchée que possible d'une grandeur continue, représentée ici par la « ligne ». C'est cette intuition profonde de la continuité de cette ligne qui constitue l'apport de Néper.

Pour faciliter encore les calculs, Briggs suggéra à Néper de choisir 10 pour base et calcula la table de ces nouveaux logarithmes, proches des logarithmes décimaux usuels (1615).

Indépendamment de Néper, un Suisse, Bürgi, qui avait été assistant de Kepler à Prague, calcula entre 1603 et 1611 une table d'antilogarithmes qui fut imprimée dans cette ville en 1620. Les tables de logarithmes, qui répondaient pour les astronomes et les calculateurs à un besoin pressant, connurent un succès immédiat et considérable.

La ligne logarithme a donc été découverte par des méthodes relativement anciennes : tables de correspondance, considérations directement cinématiques. La fonction $\log x$, définie pour tout x , n'apparaît pas en tant que telle. Elle n'est pas encore affectée d'un symbole qui lui permettrait de s'intégrer dans la nouvelle algèbre de Viète.

Il ne fallut qu'une vingtaine d'années pour que Fermat et Descartes, en appliquant cette nouvelle algèbre à la géométrie, introduisent la méthode analytique d'étude des fonctions, qui devait ouvrir une nouvelle ère en mathématiques.

5. Descartes : courbes géométriques et fonctions algébriques

L'objectif principal de Descartes, exposé dans sa *Géométrie* de 1637, est de réduire la solution de tous les problèmes algébriques, qui sont des problèmes de résolution d'équations, à quelques procédures standards pour construire leurs racines réelles, qui seront les coordonnées des points d'intersection de courbes planes appropriées, de degré le plus bas possible.

Descartes distingue courbes géométriques et courbes mécaniques et se restreint aux « courbes géométriques », celles où les deux coordonnées x et y sont reliées par une équation algébrique $P(x, y) = 0$ (qu'on appelle aujourd'hui courbes algébriques).

A leur propos, Descartes écrit : « Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y , on en trouvera aussi pour la ligne x , et ainsi on aura une infinité de points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée. » (*La Géométrie*.)

Ici, et sans doute pour la première fois aussi clairement, est exposée l'idée qu'une équation entre x et y est une façon d'introduire une relation de dépendance fonctionnelle entre quantités variables, au sens que l'une d'elles permet de déterminer l'autre.

Les courbes non géométriques ne sont pas susceptibles d'être traitées par les méthodes analytiques de Descartes. Il ne sait pas les étudier systématiquement et les rejette donc de sa *Géométrie*, ce qui le restreint d'autant dans l'approfondissement de la notion de fonction. En effet, comme l'a montré J. Vuillemin : « est fonctionnelle [pour Descartes] une relation qui permet de faire correspondre à une longueur donnée une autre longueur déduite de la première par un nombre fini d'opérations algébriques. Seule une telle relation est, selon Descartes, susceptible d'une construction par laquelle on atteindra tous les points de la courbe, sans en exclure aucun. Cette possibilité assurera l'enchaînement et la continuité intuitive de la courbe, sans qu'aient besoin d'intervenir des considérations infinies ».

Cet impératif d'obtenir une longueur à l'aide d'une autre par un nombre fini d'opérations algébriques est lié à une théorie des proportions exactes de Descartes, elle-même dépendante de sa métaphysique. On aperçoit ici, une fois de plus, quel est le poids considérable de la lecture du Livre V d'Euclide et l'importance de la pensée mathématique grecque. En général, les courbes transcendantes échappent à cette détermination exacte, et la relation qui lie les coordonnées des points de ces courbes n'est pas pensée, par Descartes, comme de type fonctionnel.

Pourtant, sollicité et stimulé par les défis de ses adversaires (Fermat, Roberval, Florimond de Beaune, etc.), Descartes invente souvent des procédés nouveaux pour des courbes transcendantes exclues de sa *Géométrie*.

C'est ainsi que l'on trouve, répondant à un problème posé par Florimond de Beaune, une théorie cartésienne de la courbe logarithme avec appel à un procédé très semblable à celui de Néper. Mais, comme la courbe était « mécanique » et n'entrait pas dans son système, Descartes n'en donna pas l'équation.

L'introduction de la fonctionnalité par l'intermédiaire des équations constitue une étape très importante dans le développement des mathématiques. Cette méthode de représentation des fonctions devait immédiatement quitter son champ d'origine de la géométrie analytique pour être étendue à d'autres branches des mathématiques et, avant tout, dans le domaine de l'analyse infinitésimale.

6. Les algorithmes infinis

L'idée de Descartes de restreindre la notion de fonction aux seules expressions algébriques était un carcan qui n'a pas résisté longtemps à la découverte des mathématiciens de la génération suivante (Wallis, N. Mercator, James Gregory, I. Newton...) : le développement des fonctions en séries infinies de puissances.

Nicolas Mercator lance vraiment la technique dans sa *Logarithmotechnia* en 1668; il trouve l'aire de l'hyperbole en réduisant d'abord en série

géométrique $\frac{1}{1+x}$, puis en l'intégrant terme à terme suivant la méthode de

Wallis. La méthode a un succès foudroyant et très nombreux sont les mathématiciens qui s'y distinguent. La palme revient certainement à

I. Newton, qui trouve les séries des puissances rationnelles de $(1+x)^{-1}$, des fonctions $\sin x$, $\cos x$, des séries analogues pour les arcs d'ellipse, etc. Les fonctions inverses des lignes trigonométriques sont étudiées aussi par Newton, qui donne leurs développements en séries. Ainsi, à travers les quadratures, les sommations de séries, de nouvelles fonctions transcendentes apparaissent et sont étudiées.

La meilleure définition explicite du concept de fonction à ce moment est donnée par James Gregory en 1667 (*Vera circuli et hyperbolae quadratura*) ; il définit une fonction comme une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou, dit-il, par n'importe quelle opération imaginable. Mais le contexte suggère qu'il est nécessaire d'ajouter aux cinq opérations de l'algèbre (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racines) une sixième opération définie approximativement comme un passage à la limite.

Cette idée de pouvoir faire appel à des algorithmes *infinis* pour définir une fonction, et en particulier la représentation des fonctions en série de puissances entières, se révélera être un moteur de l'élargissement de ce concept.

7. Un nouvel objet mathématique : la loi de variation

Les méthodes de calcul infinitésimal ayant été créées dans le processus de résolution des problèmes de mécanique et des problèmes géométriques, agités depuis le début du siècle, les nouvelles définitions des concepts de fonction et de quantité variable ne semblent pas si éloignées de celles qu'on pouvait trouver précédemment.

Newton

Newton exprime les deux principaux problèmes du calcul infinitésimal en termes directement mécaniques¹ :

« 1. La longueur de l'espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du mouvement à un temps donné quelconque. (Différentiation.)

2. La vitesse du mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'espace décrit à un temps donné quelconque. » (Intégration des équations différentielles et des fonctions.)

En 1797, à ce propos, Lagrange écrira : « Mais, d'un côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour objet, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile... » Pendant tout le XVII^e siècle, non seulement le mouvement n'est pas une idée étrangère, mais c'est l'idée courante autour de laquelle se sont précisées les notions de l'analyse. Comme

1. *Méthodes des fluxions et des suites infinies*, traduction française par M. de Buffon, Éd. Debure, 1740.

son maître Barrow, Newton choisit le temps comme un argument universel, au sens suivant : « Mais comme nous n'avons pas besoin de considérer ici le temps autrement que comme exprimé et mesuré par un mouvement local uniforme et qu'outre cela nous ne pouvons jamais comparer ensemble que des quantités de même genre, non plus que leurs vitesses d'accroissement et de diminution, je n'aurai dans ce qui suit aucun égard au temps considéré proprement comme tel; mais je supposerai que l'une des quantités proposées de même genre doit augmenter par une fluxion uniforme à laquelle quantité je rapporterai tout le reste comme si c'était au temps; donc, par analogie, cette quantité peut avec raison recevoir le nom de temps. » (Idem.)

C'est-à-dire que Newton interprète toutes les variables x , y , v etc., comme des « quantités fluentes » s'écoulant, et ayant des vitesses de changement. Plus loin, il va distinguer les quantités fluentes en une « quantité corrélative », qui est notre variable indépendante qu'on peut assimiler au temps, et des « quantités relatives ». « Il faut concevoir que la quantité corrélative est le temps ou, plutôt, une quantité quelconque qui flue ou coule uniformément et qui mesure et exprime le temps. Et que la Quantité relative est l'espace que décrit dans ce temps un corps ou un point qui se meut d'un mouvement accéléré ou retardé d'une façon quelconque ». (Idem.)

Si x est la variable corrélative et y la variable relative, la façon dont y est fonction de x est donc *a priori* très générale puisqu'elle traduit un mouvement absolument quelconque. Mais, une fois les notions de base introduites cinématiquement, la méthode des fluxions est développée pour des fluentes définies de façon analytique, soit sous une forme finie, soit comme somme de séries infinies de puissances.

Leibniz

Quant à Leibniz, il a développé les notions de base du calcul différentiel et intégral à partir de la géométrie des courbes (cf. chapitre 5). C'est dans ce domaine qu'apparaît pour la première fois le terme même de fonction, dans un manuscrit d'août 1673, resté inédit, *la Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions*. Leibniz utilise là le mot de *relation* entre coordonnées, et, dans le problème inverse qui consiste à déterminer les coordonnées à partir d'une propriété donnée sur les tangentes de la courbe, il dit : « J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe; comme sont abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente, sous-perpendiculaire... et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer. »

En fait, Leibniz appelle fonction n'importe quelle ligne (dont la longueur dépend de la position d'un point sur une courbe donnée) et qui remplit, au sens très usuel du mot, sa *fonction* dans la figure; c'est-à-dire une ligne qui joue son rôle d'être tangente, normale, sous-tangente, etc., et qui fonctionne ainsi.

Cette acceptation se trouve aussi dans quelques articles publiés en 1692 et 1694, et elle est reprise dans le même sens en 1697 par Jean Bernoulli (1667-1748).

Cette définition de Leibniz peut sembler marginale et, en effet, elle ne recueille pas l'ampleur de l'héritage mathématique du XVII^e siècle. Pourtant, le contexte dans lequel elle surgit mérite d'être élucidé : résoudre le problème inverse des tangentes, c'est trouver une courbe qui n'est plus nécessairement la *donnée* d'un problème, comme c'était le cas dans la géométrie analytique antérieure au calcul infinitésimal, mais qui est elle-même *inconnue*. Or ligne ou courbe en géométrie analytique est synonyme de « *variation simultanée* ». Le problème de chercher des lois inconnues de variation, nous dirions aujourd'hui des fonctions, est entré dans le champ de la mathématique.

D'autre part, la poursuite, en particulier par Newton, de l'étude des lois physiques de la nature, et en premier lieu celles du mouvement, ne pouvait que confirmer la légitimité de ce changement d'orientation : là aussi, on ne pouvait continuer à considérer comme seule individualité le nombre déterminé ou ses équivalents géométriques (point, droite, cercle...).

J. Hadamard résume ainsi la situation après l'invention du calcul infinitésimal : « *L'être mathématique, en un mot, ne fut plus le nombre : ce fut la loi de variation, la fonction. La mathématique n'était pas seulement enrichie de nouvelles méthodes, elle était transformée dans son objet.* »

Finalement, au terme d'une correspondance nourrie entre Leibniz et Jean Bernoulli, celui-ci donne en 1718 la définition suivante : « *On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée, de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes.* » Il propose la notation fx .

Dans l'histoire de ce concept, une page était tournée.

8. L'analyse algébrique du XVIII^e siècle

La naissance du calcul infinitésimal va susciter un enthousiasme dont témoigne la préface au traité d'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital : « *L'étendue de ce calcul est immense : il convient aux courbes mécaniques, comme aux géométriques; les signes radicaux lui sont indifférents et même souvent commodes; il s'étend à tant d'indéterminées que l'on voudra; la comparaison des infiniment petits de tous genres lui est également facile. En delà naissent une infinité de découvertes surprenantes...* »

Si les principes et les concepts fondamentaux du nouveau calcul ne sont pas élucidés, si la manipulation des infiniment petits suscite encore bien des débats, le calcul infinitésimal fait ses preuves par l'efficacité de ses techniques. Le foisonnement de nouvelles branches mathématiques qu'il permet va considérablement élargir au XVIII^e siècle le domaine de l'analyse.

Le XVIII^e siècle mathématique commence vers 1730 avec les premiers travaux d'Euler (1707-1783), le géant de ce siècle, et ceux de Daniel Bernoulli (1700-1782). Nous sommes maintenant à une nouvelle époque de l'histoire des mathématiques, caractérisée par une distance entre philosophes et savants bien plus grande que du temps de Descartes ou de Leibniz et une spécialisation croissante du travail scientifique.

Ne pouvant apprécier le concept de limite et les problèmes introduits par l'utilisation des algorithmes infinis, Euler comme d'autres mathématiciens du XVIII^e considèrent le calcul infinitésimal comme une simple extension de

l'algèbre : aux opérations algébriques précédemment connues, on aurait ajouté deux opérations nouvelles fondamentales, la différentiation et l'intégration et il n'y aurait pas lieu de distinguer entre l'algèbre et l'analyse. Pour affranchir le calcul infinitésimal de la géométrie et de toutes considérations métaphysiques en ce qui concerne l'infini, Euler se propose donc de le fonder sur l'arithmétique et l'algèbre.

Le premier grand texte didactique d'Euler, l'*Introductio in analysin infinitorum*, publié en 1748, traite donc des préliminaires algébriques indispensables, selon lui, à l'étude du calcul infinitésimal lui-même, auquel sont consacrés deux autres traités. Dans l'*Introductio*, Euler veut étudier les propriétés des fonctions élémentaires en exploitant systématiquement les possibilités du calcul algébrique. Il va utiliser les manipulations algébriques sur des expressions infinies (séries, produits infinis, fractions continues...) en considérant ce calcul comme un travail *formel*, dont les règles sont les règles usuelles de l'algèbre, dénué de toutes préoccupations de convergence. Les séries sont conçues comme des polynômes à une infinité de termes et les produits infinis sont déduits d'une mise en facteurs du premier degré de ces séries analogue à la factorisation des polynômes. Beaucoup de calculs d'Euler sur les séries reviennent à des calculs dans ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre des séries formelles. C'est cette étude des algorithmes illimités de nombres réels ou complexes et des méthodes spéciales permettant de représenter, à l'aide de tels algorithmes, les fonctions élémentaires, que l'on a appelée l'*Analyse algébrique* et qui a été au cœur des recherches des mathématiciens du XVIII^e siècle.

Doué d'un esprit d'invention remarquable et d'une technique très sûre, Euler va obtenir une moisson de résultats nouveaux et variés. Avant d'examiner plus en détail ce traité et la place du concept de fonction dans les mathématiques d'Euler, faisons une courte digression sur un épisode lié au développement de cette Analyse algébrique et qui a révélé un phénomène resté caché sur les fonctions.

9. Le phénomène des fonctions « multiformes »

Dans les années 1712-13 eut lieu une controverse épistolaire mémorable entre Leibniz et Jean Bernoulli sur la valeur à attribuer aux logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.

Les nombres complexes, introduits par les algébristes italiens pour récupérer certaines racines réelles des équations algébriques, avaient été manipulés avec une confiance croissante pendant tout le XVII^e siècle. En vertu du *principe de permanence*, énoncé par Albert Girard dans l'*Invention nouvelle en l'algèbre* en 1629, on leur appliquait les opérations algébriques et les identités obtenues pour les nombres réels, mais ils étaient considérés comme de simples intermédiaires de calcul et ne devaient pas figurer dans le résultat final d'un problème. Puis, dans la manipulation algébrique des séries infinies, on se mit à substituer au réel x , le complexe z .

Une fois la fonction $\log x$ reconnue, on ne mettait donc pas en doute

l'existence d'une fonction $\log z$ vérifiant $e^{\log z} = z$, l'équation fonctionnelle du logarithme ($\log zz' = \log z + \log z'$) et l'équation différentielle

$$d \log z = \frac{dz}{z}.$$

Mais la détermination des « valeurs » des logarithmes de -1 et de i conduisait à d'insolubles contradictions.

J. Bernoulli soutenait que $\log(-x) = \log x$, et donc $\log(-1) = 0$, en invoquant 1) que les fonctions ont des différentielles $\frac{-dx}{-x}$ et $\frac{dx}{x}$ égales ou

2) puisque $(-x)^2 = x^2$, on a $2 \log(-x) = 2 \log x$, d'où l'égalité de leurs moitiés.

Leibniz, pour sa part, soutenait que les logarithmes de tous les nombres négatifs, et « à plus forte raison ceux des nombres imaginaires », étaient imaginaires; un de ses arguments était d'écrire la série² donnant $\log(1+x)$ pour $x = -2$, soit

$$\log(-1) = -2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \dots$$

et la série étant divergente, donc ne pouvant avoir une somme réelle, Leibniz en concluait tout naturellement que sa somme représentait un nombre imaginaire.

Ce désaccord sur un point important entre deux très grandes figures des mathématiques de l'époque avait créé un malaise, voire une crise de confiance à l'égard de celles-ci. Les difficultés et contradictions soulevées devaient être dénouées en 1749 par Euler, qui expliqua qu'on devait abandonner le caractère *univoque* de la notion de logarithme, et que tout nombre a une infinité de logarithmes. Pour un nombre réel positif, il a une infinité de logarithmes complexes dont un seul est réel, et c'est ce qui explique pourquoi le phénomène était resté caché.

Précisément, si z est complexe et s'écrit :

$$z = r(\cos t + i \sin t),$$

on aura la solution générale :

$$\log z = \log r + it + 2k\pi i,$$

où $\log r$ est le logarithme habituel du nombre positif r . Quand z est réel positif, $t = 0$ et $\log z = \log r + 2k\pi i$.

Si l'on convient d'appeler logarithme de z tout nombre obtenu ci-dessus, alors l'équation fonctionnelle des logarithmes n'est vraie que pour un choix convenable des déterminations de ces logarithmes.

Bien que le mémoire d'Euler soit pour nous très clair, les mathématiciens du XVIII^e siècle eurent beaucoup de mal à admettre la *multivocité* du logarithme. Notons qu'aujourd'hui seules les fonctions *uniformes* méritent le nom de *fonction*.

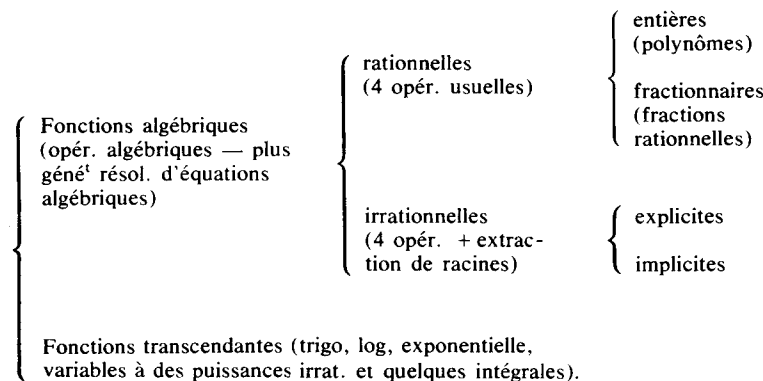
$$2. \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

10. « L'Introductio in analysin infinitorum » d'Euler

L'Introductio est le premier traité dans lequel le concept de fonction est à la base de la construction mathématique, et les premiers chapitres lui sont consacrés.

Euler définit une fonction d'une quantité variable comme « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes ». Le mot « analytique » n'est pas davantage précisé. En fait, pour Euler, une fonction est une combinaison quelconque d'opérations prises dans le stock des opérations et des modes de calcul connus de son temps et applicables aux nombres : opérations classiques de l'algèbre, exponentielle, logarithme, passage d'un arc à ses lignes trigonométriques... certaines de ces opérations pouvant être itérées un nombre illimité de fois. C'est donc le mode de construction de ces expressions analytiques qui fournit à Euler sa classification des fonctions (cf. encadré 3). Il fait trois distinctions principales entre fonctions : algébriques/transcendantes, uniformes/multiformes, explicites/implicites.

3. Classification formelle des fonctions selon Euler



La première est la plus importante : « Je les ai d'abord divisées en algébriques et en transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations ou des mêmes combinaisons que les précédentes mais répétées une infinité de fois... »

Cette manière d'Euler de définir les fonctions transcendantes est trop vague et trop incomplète pour avoir pu être maintenue. L'étude du développement des fonctions en séries infinies devait montrer que la seule définition générale que l'on puisse donner de la transcendance d'une fonction

est de dire qu'elle est transcendante sur un intervalle lorsque, sur cet intervalle, elle n'est pas algébrique, et il est impossible de remplacer cette définition par une autre de caractère plus positif. En effet, il existe des fonctions analytiques au sens d'Euler qui, suivant l'intervalle dans lequel on envisage la variable x , sont algébriques ou transcendentes.

Exemple :
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2(n+1)} + \log x^2 + 1}{x^{2n} + 1},$$

on a
$$\begin{aligned} f(x) &= \log x^2 + 1 && \text{pour } |x| < 1, \\ f(x) &= 1 && \text{pour } x = \pm 1, \\ f(x) &= x^2 && \text{pour } |x| > 1. \end{aligned}$$

Enfin, certaines expressions obtenues en répétant un nombre infini de fois les quatre opérations de l'arithmétique sont cependant algébriques et mêmes quelquefois rationnelles : il faut donc toujours *démontrer* qu'une fonction formée de cette manière est transcendante. Des analystes du XIX^e siècle (Eisenstein, Heine, etc.) établiront des critères pour distinguer dans quels cas une série entière convergente a pour somme une fonction transcendante ou algébrique.

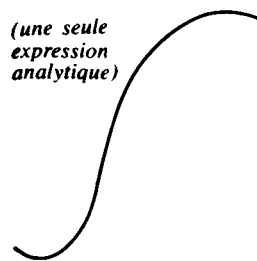
Notons que si une relation de dépendance fonctionnelle entre x et y est donnée par une équation algébrique $f(x, y) = 0$, où f est un polynôme de degré n par rapport à y , Euler dit que y est une fonction multiforme, implicite de x . Il pensait d'ailleurs que seul le développement insuffisant de l'algèbre empêchait que toute fonction algébrique implicite ne soit explicitée à l'aide des opérations algébriques élémentaires, alors qu'on sait depuis Abel et Galois que toute équation algébrique n'est pas forcément résoluble par radicaux.

Les fonctions considérées dans l'*Introductio*, c'est-à-dire définies par une seule expression analytique finie ou infinie, sont appelées «*fonctions continues*» par Euler et les autres mathématiciens du XVIII^e siècle. Fort de l'expérience des fonctions qu'il utilise, Euler pense que toute fonction peut-être développée en série infinie de puissances entières, sauf peut-être en des points isolés, ce qui est d'ailleurs vrai pour les fonctions utilisées à son époque. N'ayant pas les moyens de démontrer un tel résultat, il écrit : «*Mais, pour plus de généralité, outre les puissances de z qui ont des exposants positifs et entiers, on doit admettre des puissances quelconques. Ainsi, il ne restera aucun doute que toute fonction de z ne puisse être transformée en une série infinie de cette forme : $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta \dots$, les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., exprimant des nombres quelconques.*»

Puis Euler développe les applications du concept de fonction à la géométrie (Livre II de l'*Introductio*), il introduit aussi des fonctions mixtes ou irrégulières qui nécessitent différentes expressions analytiques dans différents domaines. La «*continuité*» exprime donc chez Euler le caractère immuable de la formule définissant la fonction pour toutes les valeurs de la variable (cf. encadré 4).

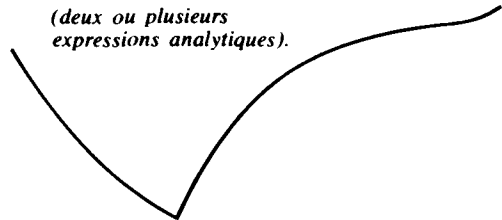
Fonction « continue » selon Euler

(une seule expression analytique)



Fonction « discontinue » (ou mixte) selon Euler

(deux ou plusieurs expressions analytiques).



11. L'équation aux cordes vibrantes

En fait, la pensée et la pratique mathématiques d'Euler sont si riches et variées qu'elles vont le conduire à bousculer sa classification formelle et à généraliser sa notion de fonction. Parmi les nouvelles fonctions transcendentes étudiées par Euler et d'autres mathématiciens (Daniel Bernoulli, Stirling, Goldbach, Fagnano, etc.), citons la fonction gamma surgie à l'occasion d'un problème d'interpolation, à savoir donner un sens à $n!$ quand n n'est pas entier, les intégrales elliptiques définies comme des primitives de fonctions irrationnelles, etc.

Mais ce qui détermine vraiment Euler à élargir la classe des fonctions définies du point de vue formel ci-dessus vient de l'horizon de la physique : il s'agit du problème de l'équation aux cordes vibrantes, abordé par Euler, d'Alembert, D. Bernoulli, un peu plus tard Lagrange. D'Alembert avait le premier donné une solution de ce problème qui se ramène à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

où α est une constante, et sa solution contenait deux fonctions arbitraires, soumises à certaines restrictions (1747). Euler, lui, en cherchant à obtenir toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles, introduisit des fonctions qui dépendent de la variable comme l'ordonnée d'un point d'une ligne plane — tracée graphiquement d'une façon libre et arbitraire — dépend de l'abscisse de ce point. Euler appelle de telles fonctions arbitraires des fonctions «*mécaniques*» et indique qu'elles correspondent à des courbes «*tracées à main libre*». Notons que cette terminologie ne coïncide pas avec

3. Quand n est un entier, on note $n!$ le produit $n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$.

celle de Descartes, pour qui les courbes «*mécaniques*» sont les courbes transcendantes.

Plus tard, Daniel Bernoulli, en reprenant ce problème, prétendit qu'on peut dans tous les cas satisfaire à l'équation aux dérivées partielles et aux conditions initiales et finales au moyen d'une série trigonométrique, c'est-à-dire une expression de la forme $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x +$

$\dots + \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \dots$ bien choisie. Son intuition

géniale est l'idée de *superposition*, selon laquelle l'oscillation la plus générale de la corde doit pouvoir se décomposer en superposition d'«*oscillations propres*», d'où le développement en série.

En comparant la solution de Daniel Bernoulli et celle d'Euler, on était naturellement amené à conclure qu'une fonction mécanique arbitraire au sens d'Euler peut être représentée par une série trigonométrique. Il devait donc en être ainsi en particulier pour ses «*courbes discontinues*» formées d'arcs de courbes distincts et simplement juxtaposés. Or cette idée de représenter une courbe arbitrairement donnée par une expression périodique répugnait aux géomètres du XVIII^e siècle, qui ont plutôt admis que la solution de Daniel Bernoulli n'avait pas le même caractère de généralité que celle d'Euler. Il faudra attendre près de cinquante ans pour avoir de nouvelles lumières sur ce qui sera l'un des grands sujets de l'analyse du XIX^e siècle.

12. La fonction, objet central de l'analyse

Le développement très important de la théorie des équations différentielles et celui du calcul des variations au XVIII^e siècle, que nous ne pouvons détailler ici, témoignent aussi de ce déplacement, dont parlait J. Hadamard, du *nombre à la fonction* comme objet mathématique central.

En effet, les équations différentielles et aux dérivées partielles sont bien les analogues des équations algébriques ordinaires par lesquelles on détermine des nombres inconnus. Cette fois, la fonction inconnue est soumise aux opérations fondamentales du calcul infinitésimal, en premier lieu la différentiation, et c'est le résultat de ces opérations qui doit avoir une valeur donnée. Cette évolution, qui paraît logique *a posteriori*, a été très stimulée par une série de questions introduites par la mécanique (recherche de l'équilibre, statique des milieux déformables, équations de mouvements, puis principe de moindre action, etc.), qui conduisaient à des équations différentielles et aux dérivées partielles et à des problèmes de maxima et de minima de quantités dépendant de fonctions arbitraires, problèmes qui sont l'objet du calcul des variations. Le problème le plus ancien qu'on peut rattacher au calcul des variations peut s'énoncer ainsi : limiter, au moyen d'une corde de longueur donnée posée à terre, une pièce de terrain renfermant la plus grande aire possible. L'inconnue, ici, n'était déjà plus un nombre, mais la position et la courbe que devra dessiner la corde (la solution est un cercle).

En conclusion, Euler et à sa suite les autres géomètres du XVIII^e siècle rompent avec le langage, le choix et l'organisation des mathématiques qui leur sont antérieures, et c'est le concept de fonction qui devient la base de

l'édifice. Après Euler, l'ordre d'exposition des principales notions de l'analyse est, à peu de chose près, celui qui est à l'œuvre aujourd'hui : rappels sur les éléments d'algèbre et les propriétés des nombres, étude des fonctions, des suites, des séries, puis calcul différentiel et intégral; ensuite, seulement, les applications à la géométrie, à la mécanique, etc. Par rapport au XVII^e siècle, un renversement complet de point de vue s'est opéré.

Dans la même perspective formaliste qu'Euler, mentionnons ici la vaste tentative de Lagrange pour donner à la science mathématique des bases rigoureuses en systématisant toute la pratique de l'analyse algébrique du XVIII^e siècle; tentative fondée sur la théorie du développement des fonctions en séries entières (voir aussi le chapitre 5). Pour Lagrange, la notion de fonction reste essentiellement celle de «*fonction continue*» au sens d'Euler; mais alors que pour ses prédécesseurs l'existence d'un développement en série entière d'une fonction est un fait d'expérience qu'on ne peut mettre en doute, Lagrange est *dogmatique* et a en vue une démonstration *a priori* valable pour les fonctions les plus générales. Sa démarche ne peut aboutir qu'à un échec car, pour donner une base solide à ce point de vue, il est nécessaire de justifier la convergence des séries; or Lagrange exclut au départ la notion de limite de sa théorie. Ce thème des fonctions développables en séries entières perdurera pendant tout le XIX^e siècle et sera intégré dans un cadre profondément modifié par Méray et Weierstrass. Lagrange achoppe également sur le problème des cordes vibrantes et doute de la possibilité de développer les solutions en séries trigonométriques. Dans cette dernière décennie du siècle, un grand pessimisme règne chez les mathématiciens quant à l'avenir de leur science. Lagrange écrit qu'«*il reste peu de moyen de faire de grands progrès avec l'analyse dans l'état actuel où elle se trouve*».

Ainsi la conception algébrique et formelle des fonctions, qui a stimulé si longtemps l'ascension de l'analyse, fonctionne maintenant comme un *facteur de blocage*. Celui-ci sera levé sous l'influence de deux séries de travaux, qui ne sont pas indépendantes d'ailleurs, des créateurs de la génération suivante. L'une avec Gauss, Cauchy, Bolzano, Abel, se caractérise par des préoccupations nouvelles de rigueur et de fondements et conduit à l'élucidation des concepts de base spécifiques de l'analyse : infiniment petit, limite, continuité, convergence, etc. L'autre, avec Fourier, Lejeune-Dirichlet, Riemann, prend sa source dans les problèmes posés par la physique et la représentation des fonctions par des séries trigonométriques.

13. L'effort de rigueur

L'obligation d'enseignement faite aux mathématiciens du XIX^e siècle est une des sources de cet effort de rigueur. En fait, tout un long processus dont nous avons pu suivre le cours à propos de la notion de limite, de celle de fonction et de la pratique de l'analyse algébrique, vient à maturation au début du XIX^e siècle. Le désir d'asseoir les mathématiques sur des bases plus rigoureuses est général. Il va se manifester de façon particulièrement vive à propos de l'usage des séries infinies : il faut définir correctement la notion de suite de nombres tendant vers une limite, la notion de série convergente.

De nombreux Mémoires et travaux paraissent sur ce sujet, ceux de

Gauss, Cauchy, Bolzano et Abel. En 1813, Gauss publie un grand Mémoire sur la série hypergéométrique, série entière dépendant de trois paramètres; c'est la première étude, exemplaire de minutie, des conditions de convergence d'une série. En 1821, le *Cours d'analyse* à l'École polytechnique de Cauchy paraît. Il est remarquable par sa rigueur, la clarté et l'élégance de son style. Dans l'introduction, Cauchy s'oppose au point de vue formal de Euler et de Lagrange en ces termes : « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. » Puis, un peu plus loin : « ... Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple (...) qu'une série divergente n'a pas de somme...: Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai à ce sujet établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention. » Le livre contient une étude systématique de la convergence des séries, la mise en évidence de critères de convergence, distingue entre convergences simple et absolue, etc.

Abel aussi déclare que « les séries divergentes sont une invention du diable, et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles la moindre démonstration. On peut en tirer tout ce qu'on veut quand on les emploie et ce sont elles qui ont produit tant d'échecs et tant de paradoxes » (1826). Il publie un important Mémoire sur la série du binôme de terme général $[m(m-1)...(m-n+1)x^n]/n!$ et l'étudie suivant les valeurs réelles et complexes de la variable x , et le paramètre complexe m .

Chez Cauchy et Bolzano, on trouve des définitions de la *continuité* d'une fonction (univoque) sur un intervalle, assez proches de notre acception actuelle. Voici celle de Cauchy : « La fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre des limites données si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. » Celle de Bolzano est encore plus précise : « La différence $f(x-w) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée si l'on peut toujours prendre w aussi petit que l'on voudra. » Ces définitions sont très importantes car elles posent la continuité comme une *propriété locale* et rompent avec la terminologie eulérienne, dont on peut dire qu'elle exprimait une sorte de continuité globale puisqu'une fonction continue pour Euler est définie par une seule loi analytique, terminologie qui va tomber en désuétude.

Pourtant ces définitions qui ne sont pas encore *quantifiées* (comparer avec la définition moderne de l'encadré 5) laisseront longtemps subsister des

5. Définition moderne de la continuité

On définit aujourd'hui la continuité d'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , au point x_0 , ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 / |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f est continue sur $[a, b]$ si f est continue en tout point x_0 appartenant à $[a, b]$.

ambiguïtés : on prendra l'habitude de définir une fonction continue comme ne pouvant passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires et de considérer cette définition comme équivalente à celle de Cauchy et de Bolzano, ce qui est inexact. Enfin, on trouve encore chez Cauchy une très bonne définition de la dérivée. Mais, là aussi, les mathématiciens ne mettront pas en doute pendant des années l'*existence* de la dérivée des fonctions continues, et cette confusion sera la source de bien des hésitations de Cauchy dans ses recherches sur les fonctions de la variable complexe. Nous verrons qu'au cours du XIX^e siècle l'histoire du concept de fonction est inséparable de celle de continuité.

14. Le développement des fonctions en séries trigonométriques

Dès 1805, Fourier va aborder un problème largement discuté à son époque, celui de la propagation de la chaleur. Dans l'étude des phénomènes physiques, la possibilité d'approcher un problème ayant trait au continu par un autre où un nombre fini de corps sont impliqués avait déjà permis d'élaborer une description mathématique d'un phénomène physique. C'est ainsi que Huygens avait trouvé l'équation de la « chaînette » sans même les méthodes du calcul infinitésimal, c'est aussi la méthode adoptée par Daniel Bernoulli dans l'étude des cordes élastiques pesantes. Il avait eu l'idée de remplacer la corde ayant une certaine densité connue par un nombre fini de points pesant sur une corde sans masse et d'étudier les oscillations de ce système. Puis il était passé ensuite à la limite en faisant tendre le nombre des points vers l'infini, de façon que la corde devienne homogène, et il en avait déduit l'équation des cordes vibrantes.

La démarche de Fourier pour élaborer une théorie du mouvement de la chaleur était donc naturelle : il voulait étudier les échanges de chaleur entre un certain nombre de corps disjoints, puis, augmentant le nombre de ces corps et diminuant leurs dimensions, arriver à une formule illustrant la marche de la chaleur dans un corps continu.

Dans sa *Théorie analytique de la chaleur* parue en 1822, il considère la température v d'une lame infiniment mince d'un solide dont un point quelconque a pour coordonnées x et y . Elles vérifient l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Par superposition de solutions particulières, il obtient une solution générale pour v de la forme :

$$v = a_0 e^{-x} \cos y + a_1 e^{-3x} \cos 3y + \dots + a_i e^{-(2i+1)x} \cos(2i+1)y + \dots$$

Pour déterminer les coefficients a_i , Fourier utilise les conditions aux limites, dérive une infinité de fois les séries infinies, puis, en faisant $y = 0$ dans les équations obtenues, il en vient à résoudre une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, tout cela sans justifications mathématiques suffisantes mais guidé par une intuition du phénomène physique étudié.

Notons ici que cette méthode de passage du fini à l'infini restera quelque peu dans l'ombre au cours du XIX^e siècle, mais elle réémergera avec les

œuvres de Fredholm et de Volterra sur les équations intégrales vues comme des limites de systèmes d'équations linéaires, et dans l'œuvre de Hilbert.

Dans la section VI, « Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques » de la *Théorie analytique*, Fourier considère une fonction f définie dans $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$ dont le développement en série trigonométrique est de la forme :

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_k \sin kx + \dots$$

Le problème est de calculer les coefficients a_k dans le cas même, dit-il, où « la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire... On ne suppose point que ces coordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité ». Fourier s'engage alors dans une voie nouvelle : en multipliant l'expression précédente par $\sin kx$ et en intégrant terme à terme la série, cela sans justification, il arrive au résultat remarquable suivant :

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Fourier observe que dans tous les cas envisagés, ces intégrales ont un sens et en conclut que toute fonction d'une variable peut-être représentée par une série trigonométrique. Cette conclusion, quoique non rigoureuse, fut cette fois acceptée par la communauté mathématique.

Le Mémoire de Dirichlet

C'est en 1829 que Lejeune-Dirichlet, dans un Mémoire qui fera date*, fait faire à cette théorie des progrès décisifs. Par une analyse, dont Jean Dieudonné écrit qu'elle « allait servir de modèle aux innombrables recherches du XIX^e siècle », il démontre la proposition énoncée par Fourier en précisant sous quelles conditions une série trigonométrique ayant pour coefficients ceux de Fourier converge et représente, dans un intervalle fini donné, une fonction arbitrairement donnée.

Ces conditions, dites de Dirichlet, peuvent se résumer ainsi :

- 1) f est univoque et bornée;
- 2) f a un nombre fini de discontinuités par période (elle est donc continue par morceaux);
- 3) f possède seulement un nombre fini de maxima et de minima par période (elle est donc monotone par morceaux).

Aux points de discontinuité, la série de Fourier de la fonction converge vers la valeur $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ (cf. exemple de l'encadré 6).

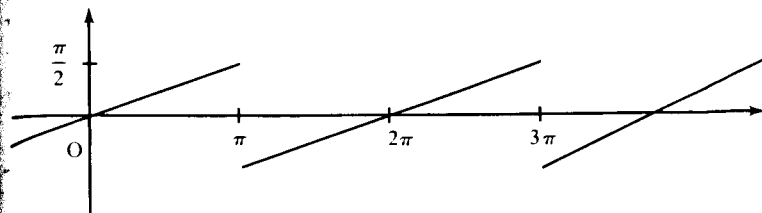
L'ensemble de ces recherches va avoir une influence profonde non seulement sur la notion de fonction mais aussi sur celle d'intégrale, de convergence

* Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

uniforme, d'ensemble de points. En effet, les conditions du théorème de Dirichlet mettent l'accent sur les notions de continuité, de dérivabilité, le « nombre » des points en lesquels une fonction n'est pas continue, ou bien pas dérivable, ou pour lesquels la dérivée s'annule.

6. Développement en série de Fourier d'une fonction

Exemple d'une fonction continue et monotone par morceaux et de son développement en série de Fourier.



La série

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots$$

est égale à $x/2$ si $x \in [0, \pi[$ et à 0 si $x = \pi$

C'est le contre-exemple donné par Abel au « théorème » inexact de Cauchy.

A ce point, les questions suivantes sont ouvertes : construire des fonctions qui ne satisfont pas aux conditions de Dirichlet, bien séparer les notions de continuité et de dérivabilité, et puis bientôt caractériser l'ensemble des points de discontinuité, ou l'ensemble des maxima ou des minima, etc., si l'on accepte ici l'anticipation que constitue l'emploi du mot ensemble. D'ailleurs, dès la fin de son mémoire, Dirichlet donne l'exemple, d'une nature toute nouvelle, d'une fonction discontinue en tous ses points : la fonction $f(x)$ qui vaut une constante c si x est un rationnel et qui vaut une autre constante d si x est un irrationnel.

La théorie de Riemann

Mais c'est surtout B. Riemann qui, reprenant les recherches au point où les a laissées Dirichlet, va développer toutes ces nouvelles questions. Dans un mémoire retentissant présenté en 1854 pour sa thèse d'habilitation à l'université de Göttingen et publié en 1867 (*Sur la représentation des fonctions en séries trigonométriques*), il va développer une théorie de l'intégration plus générale que celle de Cauchy (voir chapitre 5) pour pouvoir justement représenter par des séries de Fourier (dont les coefficients, il convient de le noter, sont égaux à des intégrales définies portant sur la fonction elle-même) des fonctions ayant une infinité de discontinuités. Il donne d'ailleurs

l'exemple d'une fonction bornée ayant une infinité dénombrable⁴ de discontinuités et intégrable selon sa théorie de l'intégration.

Si on appelle ϕ_E la fonction caractéristique d'une partie E de la droite réelle \mathbb{R} , fonction qui vaut 1 quand x appartient à E et 0 quand x n'y appartient pas, intégrer la fonction ϕ_E revient à « mesurer » la partie E. La première théorie formalisée de l'intégrale, celle de Cauchy, permettait de définir l'intégrale de fonctions continues, ou de fonctions ayant des discontinuités « discrètes » (c'est-à-dire en nombre fini dans un intervalle borné). Elle permettait donc de mesurer des intervalles ou des réunions d'intervalles. La théorie de Riemann permet pour la première fois de mesurer un ensemble S de points qui n'est pas nécessairement un intervalle (cf. encadré 7).

En 1875, Darboux démontrera, à partir du résultat de Riemann prouvant

7. Définition de l'intégrale selon Riemann

Soit f une fonction réelle, définie dans un intervalle $[a, b]$ et une suite (x_i) , $0 \leq i \leq n$ telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Soit $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ et $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$, où $0 \leq \delta_i \leq 1$.

Si la somme S « a la propriété, de quelque manière que les δ et les ε puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'une limite fixe A, quand les δ tendent vers

zéro, cette limite s'appelle la valeur de l'intégrale définie $\int_a^b f(x) dx$ ».

Soit $D_i = \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)|$ l'oscillation de f dans $[x_{i-1}, x_i]$

et $h = \sup_{1 \leq i \leq n} \delta_i$ le pas de la subdivision.

Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que A existe est que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\delta_1 D_1 + \dots + \delta_n D_n) = 0.$$

Et Riemann remplace cette condition d'intégralité par une autre : « Pour qu'une fonction bornée soit intégrable dans $[a, b]$, il faut et il suffit qu'on puisse diviser $[a, b]$ en intervalles partiels tels que la somme des longueurs de ceux de ces intervalles dans lesquels l'oscillation est plus grande que ε , quel que soit $\varepsilon > 0$, soit aussi petite que l'on veut. »

En termes modernes, ce critère s'énonce : Pour qu'une fonction bornée soit intégrable (au sens de Riemann), il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de f soit de mesure nulle.

4. Un ensemble est dénombrable si l'on peut numéroter ses éléments, c'est-à-dire les ranger en une suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ indexée par les entiers. Tout ensemble dénombrable est en bijection avec \mathbb{N} . Par exemple, l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels est dénombrable.

l'existence de fonctions discontinues susceptibles d'intégration, qu'il y a des fonctions continues n'ayant pas de dérivée; mais, dès le Mémoire de 1854, continuité et dérivabilité deviennent des propriétés disjointes.

15. La notion de fonction arbitraire et ses conséquences

Après Fourier, Cauchy, Dirichlet, Riemann, on peut dire que la notion la plus générale d'une fonction (univoque) y , d'une variable indépendante x , conçue comme une correspondance arbitraire est acquise. Est-ce à dire que la pratique des géomètres du XVIII^e siècle, leurs calculs sur les expressions analytiques sont devenus caducs? Quelles sont les transformations que va entraîner cette conception dans le développement de l'analyse?

La connaissance et l'étude d'une fonction arbitraire exigent théoriquement de dresser un tableau idéal où chaque valeur de x est mise en regard avec la valeur correspondante de y . Mais, comme ce tableau idéal devrait comporter une infinité d'éléments (sauf dans le cas très particulier où le domaine de définition de x est fini), il n'est pas question de le réaliser effectivement. Si le tableau peut être condensé dans un procédé de calcul permettant d'obtenir la valeur y correspondante à chaque valeur x , on est ramené à une pratique plus familière, même si le procédé de calcul peut être imaginé aussi compliqué que l'on veut. On peut par exemple le supposer différent pour diverses classes de nombres entre lesquels on répartit, suivant une loi donnée, les nombres du domaine de x et ces classes de nombres peuvent même être en nombre infini, mais dénombrable.

Mais en raison même de la très grande généralité de la notion de fonction, il est apparu très vite qu'on ne saurait obtenir de résultats de quelque étendue concernant la théorie des fonctions en opérant des classifications seulement parmi les formes des expressions analytiques et des procédés de calcul qui définissent les fonctions, comme Euler l'avait fait, mais qu'il fallait distinguer plutôt parmi les fonctions possibles, certains types déterminés, caractérisés par un nombre suffisant de propriétés données. On se mit à étudier différentes classes de fonctions : continues, discontinues (ponctuellement ou totalement), différentiables, à variation bornée, intégrables, etc. Ces classes sont introduites par une propriété de base qui définit la structure de la classe, propriété qui a pu être suggérée par l'étude des phénomènes naturels, ou par le désir de systématiser les résultats déjà obtenus sur des fonctions connues. Comme l'a résumé René Baire, chacune de ces propriétés distinctives conduit à une étude particulière et toutes ces études présentent le caractère commun suivant : on recherche si le fait d'imposer à la fonction la plus générale telle ou telle restriction s'exprimant par une propriété précise n'en entraîne pas d'autres.

Ainsi, l'approfondissement des notions de fonction et de continuité s'est accompagné de la construction de fonctions de plus en plus pathologiques par rapport aux idées initiales plus simples que les mathématiciens pouvaient se faire, fonctions qui jouaient le rôle de contre-exemples à de fausses conjectures. Par exemple, Weierstrass construit une fonction continue sur un

certain intervalle et dérivable en aucun point de cet intervalle. Il est clair que cette progression par exemples et contre-exemples fait appel à des procédés de calcul analytique complexes combinant l'emploi de séries et produits infinis, de passages à la limite, etc.

Enfin, une transition naturelle entre l'ancienne conception de fonction et la nouvelle, grâce à laquelle on peut espérer se rapprocher des conditions antérieures, est l'utilisation des algorithmes infinis pour représenter et approcher des fonctions de plus en plus générales. Au XIX^e siècle, la série de Taylor et la série de Fourier sont les deux algorithmes les plus importants, et c'est pourquoi nous avons choisi d'en étudier précisément l'histoire.

16. Séries de fonctions continues et convergence uniforme

Dans son *Cours d'analyse*, Cauchy avait « démontré » que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point x_0 , alors sa somme est une fonction continue dans le même voisinage. Abel, le premier (1826), avait attiré l'attention des mathématiciens sur l'inexactitude de ce résultat en fournissant comme contre-exemple la série :

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \dots,$$

qui est égale à $x/2$, si $x \in]0, \pi[$ et à 0 si $x = \pi$; la fonction vers laquelle converge la série est donc discontinue au point $x = \pi$ (voir encadré 6).

En fait, le théorème de Dirichlet, qui exprime qu'une fonction continue par morceaux et monotone par morceaux est développable en séries (de Fourier) de fonctions continues contredisait aussi le « théorème » énoncé par Cauchy; cela fut remarqué par Seidel en 1847. A la suite de travaux de plusieurs mathématiciens (Seidel, Stokes, Guderman, Cauchy lui-même, enfin Weierstrass) la notion de *convergence uniforme* d'une série de fonctions est exhibée. Weierstrass énoncera et démontrera correctement les théorèmes sur la continuité, la dérivabilité et l'intégrabilité de la somme d'une série de fonctions, pour lesquels cette notion est nécessaire.

En termes modernes, dire qu'une série converge uniformément dans un intervalle I signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N(\varepsilon)$, alors $|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$; et dire que N ne dépend que de ε et pas de x dans l'intervalle considéré exprime le fait que la série de fonctions converge de la même façon dans tout l'intervalle. La démonstration de Weierstrass, qui ne diffère guère de la démonstration actuelle (voir encadré 8), permet de souligner ici, sur un cas simple, le « style » mathématique de Weierstrass, qui fut un modèle de rigueur : le découpage des « *epsilon* », l'utilisation systématique des inégalités et des majorations, tout ce qui fait le pain quotidien de l'analyse moderne et qui participe du mouvement que F. Klein a appelé « *arithmétisation de l'analyse* ».

Illustration de « l'arithmétisation de l'analyse » sur l'exemple du « théorème » de Cauchy. (Démonstration moderne.)

On suppose que les fonctions f_n sont continues sur $[a, b]$ et que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$, ce qui est équivalent au fait que la suite $S_n = (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$ des sommes partielles converge uniformément vers une fonction S sur $[a, b]$. On veut montrer que S est continue.

Soit x et x_0 deux nombres quelconques appartenant à $[a, b]$. Pour tout entier n , on peut écrire :

$$S(x) - S(x_0) = S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)$$

donc :

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|$$

Par suite de la convergence uniforme, on a :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > \nu$,

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(le fait que le même ν convienne pour les deux inégalités découle de l'hypothèse de convergence uniforme).

La première inégalité écrite pour $n > \nu$ implique :

$$|S(x) - S(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |S_n(x) - S_n(x_0)|$$

Mais S_n est continue, donc :

Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x , $|x - x_0| < \eta$ entraîne $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \eta \text{ entraîne } |S(x) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

S est continue.

17. La théorie des fonctions de la variable complexe

Parallèlement à cet élargissement du concept de fonction (de la variable réelle) s'est développée au cours du XIX^e siècle une théorie des fonctions de la variable complexe, dont le véritable fondateur est Cauchy et les deux autres principaux bâtisseurs Riemann et Weierstrass.

Quelques résultats avaient déjà été trouvés au siècle précédent. En particulier en 1752, d'Alembert avait considéré une fonction complexe $u(x, y) + iv(x, y)$ (où $i^2 = -1$) de deux variables réelles et indiqué les conditions pour que cette fonction admette une dérivée lorsque le point de coordonnées x, y tend vers un point donné, cette dérivée étant unique, c'est-à-dire indépendante du chemin suivi pour atteindre ce point. Ces conditions s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il s'agit des conditions que l'on appelle maintenant de Cauchy-Riemann après qu'à la suite de leurs travaux on eut compris qu'il suffit de considérer la fonction $u(x, y) + iv(x, y)$ de deux variables réelles x et y , comme fonction $f(z)$ de la variable complexe $z = x + iy$ et que ces conditions expriment la dérivabilité par rapport à cette variable complexe, ce qu'on nomme aujourd'hui la \mathbb{C} -différentiabilité.

Le point de départ de Cauchy (1825) est un théorème assez simple sur l'intégrale définie d'une fonction de la variable complexe z prise entre des limites imaginaires. Cauchy montre que l'intégrale est indépendante du chemin choisi, et ne dépend que des extrémités, pour une fonction « $f(z)$ finie et continue ». Une fonction assez générale peut alors être représentée par une intégrale et devenir une expression analytique maniable par l'analyste. Il en déduit un théorème sur la possibilité de représenter une fonction $f(z)$ par un développement en série de Taylor, mais hésite longtemps sur les conditions à imposer à la fonction. On sait aujourd'hui qu'il suffit que la dérivée complexe existe. En fait, Cauchy a surtout développé une fonction autour d'un point régulier et considéré le cas d'une fonction uniforme.

Pour Riemann, le visionnaire génial de ce siècle, l'image géométrique joue le rôle dominant. Il part de fonctions \mathbb{C} -différentiables et s'occupe de donner des représentations d'une fonction multiforme, c'est-à-dire prenant de multiples valeurs en un certain point suivant le chemin par lequel on atteint ce point. Comme il n'est pas question d'entrer dans le détail de sa théorie, indiquons que son idée est de récupérer l'uniformité de la fonction en démultipliant autant qu'il le faut les valeurs de la variable qui ne parcourt plus simplement le plan complexe mais un système de plans superposés qui constituent les feuilletés de la surface de Riemann⁵.

Les fonctions analytiques de Weierstrass

Quant au point de vue plus arithmétique de Weierstrass, nous nous y attarderons davantage car il renoue avec celui de Lagrange, voire même celui d'Euler, c'est-à-dire le développement des fonctions en séries entières de Taylor et que nous pouvons prendre la mesure de près d'un siècle de travaux d'analyse (cf. encadré 9). En effet, le cadre est entièrement modifié : la notion de convergence a pris tout son sens et il n'est pas question de

Quand les géomètres des XVII^e et XVIII^e siècles parlaient de la série de Taylor d'une fonction, ils considéraient l'expression formelle $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, qu'ils égalaient à $f(x)$.

Il est évident pour nous que si la fonction f n'est pas indéfiniment dérivable, dans un voisinage de 0, cette expression infinie n'a pas de sens. Mais même dans le cas où la fonction est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, la série ci-dessus n'est pas forcément convergente.

Aujourd'hui, pour une série entière $\sum a_n x^n$ (que x soit réel ou complexe), on définit son *rayon de convergence* ℓ , comme le nombre réel positif tel que la série diverge pour $|x| > \ell$ et converge pour $|x| < \ell$. Le *cercle de convergence* est le cercle du plan complexe, de centre 0 et dont le rayon est le rayon de convergence de la série.

On pourra donc parler du cercle de convergence de la série (entière) de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

De plus, il n'est pas vrai (toujours pour une fonction indéfiniment dérivable) que la série de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ converge forcément vers $f(x)$, dans un cercle de convergence de rayon strictement positif. Les premiers contre-exemples ont été trouvés par Cauchy et Weierstrass.

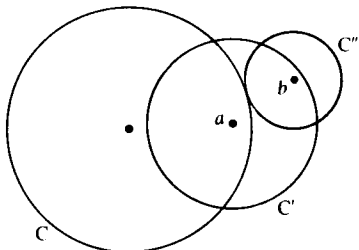
Précisément pour étudier la convergence de la série de Taylor de f au point 0 (f étant supposée indéfiniment dérivable au voisinage de 0), il faut étudier la limite de $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ quand $n \rightarrow \infty$.

considérer des séries entières en dehors de leur *cercle de convergence*. Le point de vue de Weierstrass est donc l'étude *locale* des fonctions.

De plus, il s'agit de fonction de la variable *complexe*, parce qu'une fonction \mathbb{C} -différentiable et uniforme est *analytique* dans le sens (qui est resté définitivement) qu'elle est développable en série entière de Taylor au voisinage de tout point où elle est définie. C'est l'essence du théorème de Cauchy. Or, dans le cas de la variable réelle, une fonction même indéfiniment dérivable n'est pas forcément développable en série entière de Taylor. Le cadre de la variable complexe s'avère donc beaucoup mieux adapté à l'étude des fonctions analytiques.

Si on s'en tient à la variable réelle, on se heurte à de très grandes difficultés pour *prolonger* une fonction définie seulement dans un intervalle déterminé par une expression analytique n'ayant un sens que dans cet intervalle. Par contre, dans le cas de la variable complexe, la méthode du *prolongement analytique* développée par Weierstrass, permet, au moins théoriquement, de déduire, à partir d'un élément de fonction défini dans un cercle de convergence, la valeur de la fonction en tout point où elle est définie.

5. Nous suivons ici les explications très claires de Jean-Luc Verley dans l'*Abrégé d'histoire des mathématiques*.



Quel est le principe du prolongement analytique? Si on se donne une fonction $f(z)$ sous la forme d'une série entière en z convergente dans son cercle de convergence C , on sait d'après Cauchy qu'elle est égale aussi à la somme d'une série entière suivant les puissances de $(z - a)$, série qui est convergente dans un cercle C' centré en a . Si C' déborde de C (cas où a est un point régulier), la série en $(z - a)$ définit dans la portion de C' extérieure à C le prolongement analytique de $f(z)$. On opère ainsi de proche en proche, au moyen d'une chaîne de disques, indéfiniment s'il y a lieu, et on obtient la fonction dans tout son domaine naturel d'existence. Évidemment, on peut obtenir plusieurs valeurs distinctes en un même point du plan complexe qu'on a pu atteindre par deux chaînes de disques différentes et on retombe sur le problème des fonctions multiformes qu'on peut traiter suivant les idées de Riemann.

Ainsi, avec Weierstrass, le développement en série de Taylor est arrivé au faite de sa fécondité. Il permet d'atteindre la classe des *fonctions analytiques* qui est maintenant bien fixée. Plus tard, l'étude d'autres algorithmes infinis se développera : produits infinis, séries de polynômes, etc., soit pour atteindre des classes plus générales de fonctions, soit pour privilégier des études moins locales.

A peu près au même moment, Weierstrass démontre un théorème qui va beaucoup frapper ses contemporains : toute fonction continue est la limite d'une suite uniformément convergente de polynômes sur un intervalle borné, théorème valable pour la variable réelle et à une condition supplémentaire près pour la variable complexe. Il va impulser l'étude systématique de la notion de convergence uniforme et des questions connexes dans le dernier tiers du XIX^e siècle, et en particulier l'étude des conditions nécessaires pour que la limite d'une suite de fonctions continues soit continue (cf. encadré 10). Ce sera en particulier l'œuvre de l'école italienne : Dini, Ascoli, Volterra.

Les méthodes weierstrassiennes de la théorie des fonctions verront leur fécondité se ralentir quand les analystes porteront leur attention sur certaines propriétés générales des fonctions qui ne dépendent pas de la forme de représentation choisie. En 1898, Borel se pose la question suivante : « *Étant donné deux fonctions d'une variable complexe définies l'une dans un domaine, l'autre dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que c'est la même fonction?* » Mais cette question relève aussi de la discussion sur l'existence et les définitions admissibles des objets mathématiques, discussion très vive à la fin du siècle chez les analystes français (Baire, Borel, Lebesgue, Hadamard) et que nous reverrons à propos de la variable réelle.

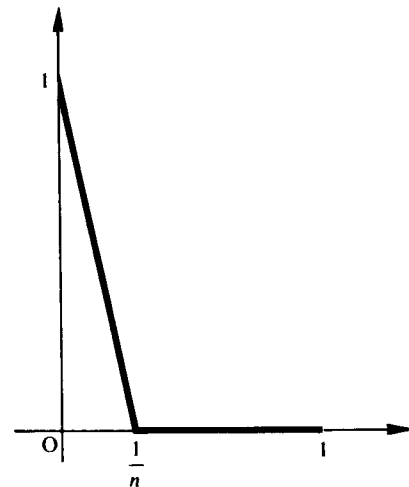
10. Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Exemple de suite de fonctions f_n définies et continues sur $[0, 1]$ qui converge non uniformément vers une fonction discontinue sur $[0, 1]$

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ f_n(x) = -nx + 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

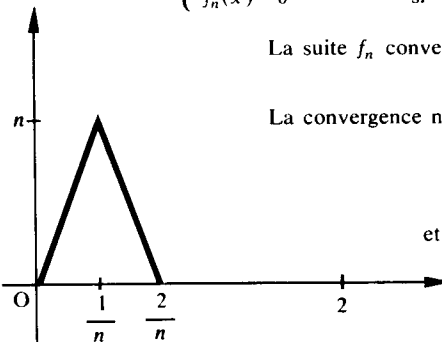
et la suite f_n converge vers f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$$



Exemple de suite de fonctions f_n définies et continues sur $[0, 2]$ qui converge vers une fonction continue sur $[0, 2]$ mais la convergence n'est pas uniforme.

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ f_n(x) = -n^2x + 2n & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 2\right] \end{cases}$$



La suite f_n converge vers f telle que :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [0, 2].$$

La convergence n'est pas uniforme car

$$\sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)| = n$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

18. Les débuts de la théorie des ensembles et de la topologie générale

Tandis que Dedekind introduit vers 1871 des notions ensemblistes dans sa théorie des nombres algébriques et des corps pour résoudre des problèmes d'algèbre et théorie des nombres (cf. chapitre 8), deux mouvements au sein de l'analyse qui ont été particulièrement moteurs dans son évolution convergent vers la théorie des ensembles.

Le premier s'est concentré sur le sujet de la représentation des fonctions en séries trigonométriques qui aboutit au problème technique de l'intégration des fonctions. Ses principaux protagonistes ont été Fourier, Dirichlet, Riemann. Nous avons déjà souligné que la théorie de l'intégration de Riemann, directement provoquée par l'énoncé des conditions de Dirichlet, considérait des ensembles de points de \mathbb{R} qui ne forment pas un intervalle et anticipait à ce propos l'idée de « mesure nulle ».

L'autre mouvement poursuivi à travers les œuvres de Bolzano, Cauchy, Dedekind, Weierstrass, Cantor concerne plutôt les principes de l'analyse, la délimitation et la méthodologie de son domaine. Préoccupations de rigueur, « arithmétisation » de l'analyse, élaboration de différentes théories des réels à l'écart du support de l'intuition géométrique en sont les traits caractéristiques. D'ailleurs, les derniers « monstres » de l'analyse (fonction continue nulle part dérivable de Weierstrass, un peu plus tard fonction de Péano qui remplit un carré) consacrent le recul de l'intuition géométrique et confirment les mathématiciens dans l'exigence d'autres principes.

Georg Cantor est partie intégrante de ces deux mouvements. Ses concepts ensemblistes proviendront de recherches sur les séries trigonométriques, et de ses travaux sur la théorie des irrationnels (cf. chapitre 5).

En 1871, il commence par démontrer que si une série trigonométrique $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge (pour n tendant vers l'infini) vers $f(x)$ égale à zéro, pour tout x dans un intervalle de \mathbb{R} , alors les a_n et les b_n sont nuls. Puis il cherche à affaiblir les hypothèses. Il commence par prouver qu'on peut supposer qu'en un nombre fini de points de l'intervalle la série trigonométrique ne converge pas vers zéro, sans que la conclusion du théorème en soit changée.

Ces préoccupations le conduisent à l'étude des ensembles de points de la droite réelle, dits « exceptionnels », c'est-à-dire tels que si une série trigonométrique converge vers zéro, sauf peut-être sur un tel ensemble, tous les coefficients de la série sont nuls.

La notion de puissance d'un ensemble

En 1872, Cantor rencontre Dedekind en Suisse; il s'ensuit une amitié durable entre les deux hommes et une correspondance presque quotidienne, témoignage très instructif sur les doutes, les préoccupations et les enthousiasmes qui entourent les débuts de la théorie des ensembles.

Cantor montre qu'on peut ranger l'ensemble des rationnels en une suite

simple indexée par les entiers, ce qui veut dire qu'il existe une correspondance biunivoque entre \mathbb{N} et \mathbb{Q} (cf. encadré 11); Dedekind prouve le même résultat pour l'ensemble des nombres algébriques. Puis Cantor introduit la notion d'ensembles de même puissance : « Si deux ensembles bien définis M et N se laissent coordonner l'un à l'autre, élément par élément, de façon univoque et complète, je me sers de l'expression... qu'ils ont égale puissance ou qu'ils sont équivalents. »

11. \mathbb{Q} est dénombrable

Pour « numéroter » les rationnels $\frac{p}{q}$ de \mathbb{Q} , on définit une relation d'ordre sur \mathbb{Q} .

Les rationnels étant supposés écrits dans leur représentation irréductible,

$$\frac{p}{q} \text{ précédera } \frac{p'}{q'}$$

si $p + q < p' + q'$

ou si $p + q = p' + q'$ et $p < p'$.

On peut ainsi ranger les éléments de \mathbb{Q} en une suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ indexée par les entiers

$$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \dots$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots$$

La relation d'équipotence, fondée sur l'existence d'une bijection entre deux ensembles définit bien une relation d'équivalence entre ensembles; deux ensembles équipotents sont dits aussi avoir même nombre cardinal. B. Bolzano avait déjà exhibé dans son ouvrage paru en 1851, *Paradoxes de l'infini*, la possibilité de mettre en bijection deux sous-ensembles infinis de \mathbb{R} ; il utilisait la bijection $x \mapsto y = \frac{12}{5}x$ et montrait que l'on pouvait faire correspondre à tout point de $[0, 5]$ un point unique de $[0, 12]$, et réciproquement. Cet ouvrage redécouvert par Hankel impressionna beaucoup Cantor.

Cantor établit qu'il n'existe pas de bijection entre \mathbb{N} et $]0, 1[$, ce qui entraîne immédiatement qu'il n'en existe pas non plus entre \mathbb{N} et \mathbb{R} (la puissance de \mathbb{R} est dite celle du continu). Il distingue deux types essentiels d'ensemble infinis : les ensembles *dénombrables* qui ont même puissance que \mathbb{N} (le cardinal du dénombrable est souvent désigné par \aleph_0) et les autres. Il a la surprise alors d'exhiber une bijection entre \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 — entre le continu à une dimension et le continu à deux dimensions — qui lui paraît si contraire à l'intuition qu'il écrit à Dedekind : « Je le vois, mais je ne le crois pas. » Dedekind pressent alors la non-existence d'une application bijective et bicontinue (continue ainsi que son inverse, ce qu'on appelle « homeomor-

— 12. Cantor : Construction d'un ensemble d'une puissance supérieure — à une puissance donnée

On va montrer que si M est un ensemble, l'ensemble $\mathcal{F}(M)$ des sous-ensembles de M a une puissance strictement supérieure à celle de M .

Il existe une injection canonique de M dans $\mathcal{F}(M)$ qui à tout x associe la partie réduite à x , soit $\{x\}$.

On veut montrer qu'il ne peut exister une injection de $\mathcal{F}(M)$ dans M . Supposons qu'il y en ait une, soit f .

$$f : \mathcal{F}(M) \longrightarrow M.$$

On construit alors une surjection g de M dans $\mathcal{F}(M)$.

En effet si $x \notin f(\mathcal{F}(M))$, on définit $g(x) = \{x\}$

si $x \in f(\mathcal{F}(M))$, on prend $g(x) = f^{-1}(x)$.

On pose $N = \{ \text{ensemble des } x \text{ appartenant à } M \text{ et tels que } x \notin g(x) \}$.

N est une partie de M , donc $N \in \mathcal{F}(M)$.

Comme g est surjective, il existe $x_0 \in M$ tel que $g(x_0) = N$.

Alors, si $x_0 \in N$, on en déduit que $x_0 \notin g(x_0) = N$ et cette hypothèse est impossible; si $x_0 \notin N$, on en déduit que $x_0 \in g(x_0) = N$ et cette hypothèse est aussi impossible.

On aboutit à une contradiction, il n'existe pas d'injection de $\mathcal{F}(M)$ dans M ; $\text{card } \mathcal{F}(M) > \text{card } M$.

Mais en dehors d'un cadre axiomatique précis, cette démonstration caractéristique de la théorie cantorienne est du type même de celles qui aboutissent à des contradictions paradoxales. Elle fait intervenir une classe d'objets contenant précisément l'objet à définir.

Ces paradoxes devaient très violemment secouer la théorie des ensembles. Elle ne surmonta définitivement la crise qu'avec son axiomatisation précise que proposèrent Zermelo puis Fraenkel au début du xx^e siècle.

phisme») entre \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . Cette inexistence sera établie en 1879 par Netto, et Peano construit sa célèbre fonction continue et surjective, mais non injective, de $[0, 1]$ dans $[0, 1] \times [0, 1]$, qui remplit le carré. Nous entrons ici dans la théorie topologique de la dimension.

Cantor montre aussi qu'on peut toujours, à partir d'un ensemble E , construire un ensemble de puissance strictement supérieure, par exemple $\mathcal{F}(E)$ (cf. encadré 12), et on vérifie facilement que $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} sont équipotents; il suffit de considérer tout nombre réel positif comme défini par une expression $k, x_1 x_2 \dots x_n \dots$, où k est un entier et $x_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ pour tout n . Persuadé qu'il n'existe pas d'autres types d'ensembles infinis de points de \mathbb{R}^n autres que ceux équipotents à \mathbb{N} ou à \mathbb{R} , Cantor tentera toute sa vie de

prouver cette « hypothèse du continu », dont on sait aujourd'hui (grâce aux travaux de P. J. Cohen en 1963) qu'elle est « indécidable » dans le cadre de l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel de la théorie des ensembles. Tous ces résultats inattendus conduisent Cantor à vouloir abstraire les mécanismes qu'il dégage et chercher des possibilités de passage du continu au dénombrable.

Cantor et l'arithmétisation de l'infini

Entre 1879 et 1884, Cantor redonne, dans une série d'articles *Sur les ensembles infinis linéaires de points*, un exposé synthétique de ses idées sur les sous-ensembles de \mathbb{R} en utilisant la notion d'« ensemble dérivé », déjà présente dans ses travaux de 1870-1872 sur les séries trigonométriques.

En effet, sa théorie des irrationnels, définis comme suites fondamentales de rationnels, l'avait conduit à dégager avec Weierstrass la notion de point d'accumulation d'un sous-ensemble de \mathbb{R} . $x \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de E si tout intervalle ouvert contenant x contient une infinité de points de E ; le premier ensemble dérivé de E , noté E' (ou $E^{(1)}$) est l'ensemble de ses points d'accumulation. Un point qui n'est pas d'accumulation est dit un point isolé. On pourra définir E'' , le deuxième dérivé de E , qui est le dérivé de E' , et ainsi de suite jusqu'à $E^{(n)}$... Il introduit la notion de sous-ensemble E partout dense dans un intervalle I de \mathbb{R} , tel que tout sous-intervalle ouvert de I rencontre E ; dans ce cas, E' contient I et il n'existe pas de n tel que $E^{(n)}$ soit vide. En revanche, un ensemble E tel qu'il existe n avec $E^{(n)}$ vide, n'est pas partout dense dans un intervalle de \mathbb{R} . Ici, Cantor élabore les premières propriétés topologiques de la droite réelle.

Puis Cantor définit le dérivé d'ordre ∞ (qu'il a désigné aussi par ω) tel que $E^{(\infty)} = \bigcap E^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Son idée est de continuer, et par dérivations successives, on obtient les ensembles dérivés d'ordre $\infty + 1$, ($E^{(\infty+1)}$ est dérivé de $E^{(\infty)}$), $\infty + 2$, ..., puis d'ordre 2∞ , ($E^{(2\infty)} = \bigcap E^{(\infty+n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), $2\infty + 1$, ..., ∞^2 , ($E^{(\infty^2)} = \bigcap E^{(n\infty)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), $\infty^2 + 1$, ... Cantor est donc conduit à une véritable arithmétique transfinitive.

Il orientera ensuite sa construction vers la théorie des ordinaux transfinites : alors que la notion de cardinal correspond à l'abstraction de l'idée de dénombrement, indépendamment de l'ordre des éléments et fait intervenir les bijections, le concept d'ordinal abstrait les notions d'ordre et de succession très liées à toutes les réflexions sur le continu, et fait agir des applications conservant la relation d'ordre.

Dans l'esprit de Cantor, la théorie des ensembles abstraits et du calcul des puissances, la théorie des ordinaux transfinites, qu'il n'est pas question de détailler davantage, sont conçus pour appréhender d'un même point de vue le continu et le discontinu, de les « mesurer avec une même mesure » pour pouvoir traiter l'infini mathématique non plus seulement comme une génération progressive (l'infini potentiel) mais comme un objet directement arithmétisable, homogène aux autres quantités numériques (l'infini en acte).

A partir des années 1880, Cantor attribue à la théorie des ensembles un rôle d'unification et de synthèse de l'ensemble des mathématiques. Elle devait effectivement le remplir, mais plus tardivement après qu'elle eut

surmonté par une axiomatique appropriée les contradictions logiques pouvant survenir dans certains de ses raisonnements, qui tournent toujours autour de l'idée de l'ensemble de tous les ensembles, et qu'elle ait vaincu les répulsions de nombreux mathématiciens horrifiés de la voir surgir sur la « scène harmonieuse » de leur discipline.

19. Les fonctions discontinues. Controverse sur le concept de fonction

En théorie de la variable réelle, l'étude des fonctions *discontinues* va devenir progressivement le sujet central de la théorie des fonctions. Pendant longtemps, l'*aspect constructif* a dominé. En relation avec les théorèmes-clés de Dirichlet et de Weierstrass, on s'est borné à étudier les discontinuités des limites simples (non uniformes) de fonctions continues, les sommes de séries de fonctions continues, qui ne le sont pas.

Avec Baire, l'objectif est beaucoup plus général : dans ses *Leçons sur les fonctions discontinues* il se donne *a priori* des fonctions avec certaines discontinuités et cherche à les représenter comme limites de fonctions continues. Ici, l'*aspect de l'approximation* l'emporte, et une attention privilégiée est portée sur les ensembles des points de discontinuité d'une fonction.

Baire va élaborer une célèbre classification : la classe C^0 est la classe des fonctions continues, la classe C^1 est celle des limites de fonctions continues et qui ne sont pas dans C^0 , la classe C^2 celle des limites de fonctions de C^1 et n'y appartenant pas, etc., la classification est poursuivie pour admettre les ordinaux transfinis. Baire utilise largement la récente théorie des ensembles et du transfini cantorien, encore très contestée par beaucoup de mathématiciens et auxquels il va contribuer à donner droit de cité, et la topologie des parties de \mathbb{R} (ensembles fermés, denses, non denses, parfaits...).

La controverse est importante à partir de cette classification. Y a-t-il bien des éléments dans chaque classe de Baire? Et, si oui, les objets mathématiques, dont on peut démontrer l'existence sans pouvoir les définir effectivement au sens, par exemple, de pouvoir calculer la valeur d'une fonction pour chaque valeur donnée de la variable avec une approximation fixée, ces objets doivent-ils intervenir à part entière dans les théories mathématiques? Des désaccords existent entre Baire, Borel, Lebesgue ou Hadamard. Ils portent sur l'intérêt des ensembles dont la puissance est supérieure à celle du continu et aussi sur le concept général de fonction : peut-on employer des correspondances dont on « constate » l'existence, sans pouvoir les « décrire point par point »?

Ainsi Borel écrit à propos de l'ensemble (considéré par Cantor) des fonctions discontinues ne prenant que les valeurs 0 et 1 : « *Cet ensemble est logiquement défini; mais je me demande si nous en avons quelque conception. Pouvons-nous, en effet, concevoir la fonction discontinue la plus générale d'une variable réelle (même en supposant que les seules valeurs de la fonction sont 0 ou 1)? Il est nécessaire, en effet, pour donner une telle fonction, de*

donner sa valeur pour toutes les valeurs réelles de la variable. Or cet ensemble de valeurs n'étant pas dénombrable, il n'est pas possible d'indiquer un procédé qui permette de les avoir toutes, c'est-à-dire d'en atteindre une quelconque au bout d'un temps limité. »

En fait, la controverse autour des méthodes *constructivistes* en théorie des fonctions se trouvera assez rapidement dépassée dans le strict domaine de l'analyse. Elle trouvera un écho dans le développement au cours du XX^e siècle d'une autre discipline, la logique mathématique, avec, en particulier, la théorie des fonctions récursives.

Les problèmes issus tant de la variable complexe que de l'étude systématique des fonctions discontinues de la variable réelle vont conduire à une nouvelle étape de la théorie des fonctions : après être passée du point de vue « global » (avec Euler) au point de vue « local » (de Cauchy à Weierstrass), l'étude des fonctions devient surtout, vers 1900, « intégrale ».

20. Le point de vue intégral

Déjà le mémoire de Riemann, le point de vue de la théorie de la mesure avait été introduit notamment par Cantor, puis par Camille Jordan. Il s'agissait de trouver une généralisation aux notions de longueur, aire ou volume pour une classe plus large d'ensembles, mais qui préserve à ces notions leurs propriétés d'additivité et de continuité.

En 1898, Borel avait distingué différentes notions de mesure, mais certains mathématiciens ne les acceptaient pas, car elles assignaient la valeur zéro à la mesure d'ensembles denses.

Dans sa thèse de 1902, dont l'objet principal est la théorie de l'intégration, Lebesgue (1875-1941) présente des idées révolutionnaires en ce qui concerne l'utilisation des fonctions discontinues. Il reprend certaines indications de Borel, y joint des méthodes non constructives et élabore un outil analytique puissant qui doit convenir aux fonctions bornées, « très » discontinues, introduites par Baire, et capable aussi de régler la plupart des difficultés théoriques apparues depuis la théorie de Riemann (cf. encadré 13).

La première grande difficulté était la suivante : si une fonction bornée peut être représentée par une série trigonométrique, celle-ci est-elle forcément la série de Fourier de cette fonction? Et question voisine : l'intégration terme à terme des séries est-elle toujours possible? Fourier avait répondu positivement à ces deux questions. Or, à la fin du XIX^e siècle, on sait que l'intégration terme à terme n'est pas toujours valide même pour les séries uniformément convergentes, et cela parce que les sommes de ces séries ne sont pas obligatoirement intégrables au sens de Riemann. Toutes ces recherches inspirent l'élégante démonstration du théorème de Lebesgue : l'intégration terme à terme est toujours possible pour les séries uniformément bornées de fonctions Lebesgue-intégrables.

La deuxième grande difficulté était liée au théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, qu'on peut écrire :

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

13. Définition de l'intégrale selon Lebesgue

Soit V un ensemble quelconque, Lebesgue définit :

a) sa mesure extérieure $\overline{m}(V)$ qui est la borne inférieure des mesures des ensembles ouverts contenant V ;

$$\overline{m}(V) = \inf \overline{m}(O), \quad \forall O \text{ ouvert } \supset V;$$

b) sa mesure intérieure $m(V)$ qui est la borne supérieure des mesures des fermés contenus dans V ;

$$m(V) = \sup m(F), \quad \forall F \text{ fermé } \subset V;$$

V est dit mesurable si et seulement si $\overline{m}(V) = m(V)$.

La définition géométrique de l'intégrale d'une fonction positive f , définie pour $a \leq x \leq b$, est la mesure de dimension deux de l'ensemble : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ quand cette mesure existe.

Lebesgue donne aussi une définition analytique de l'intégrale. Soit f une fonction réelle, bornée, définie sur $[a, b]$. Supposons $m \leq f(x) \leq M$ pour $a \leq x \leq b$. Pour tous ξ, η tels que $\xi \leq \eta$ on définit :

$$V_{\xi, \eta} = \{x \in [a, b], \text{ tels que } \xi \leq f(x) \leq \eta\}.$$

Si pour tous $\xi, \eta, V_{\xi, \eta}$ est mesurable, alors f est mesurable.

Ensuite, il considère la partition

$$m = \xi_1 < \xi_2 \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = M$$

et soit :

$$V_i = \{x / \xi_i \leq f(x) \leq \xi_{i+1}\}.$$

Lebesgue considère les sommes

$$\sum_{i=1}^n \xi_i m(V_i) \text{ et } \sum_{i=1}^n \xi_{i+1} m(V_i)$$

et l'intégrale de Lebesgue est la limite commune de ces sommes, dont on peut alors démontrer qu'elle existe quand f est mesurable.

La différence essentielle avec la méthode de Riemann réside dans le fait que Lebesgue considère, non des partitions du domaine $[a, b]$ de f , mais du domaine des valeurs de f .

Voici par quelle image Lebesgue expliquait la nature de son intégrale : « *Je dois payer une certaine somme; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale.* » *Biographie de Lebesgue*, par A. Denjoy, M^{me} Félix et P. Montel.)

La notion d'intégrale ainsi obtenue est plus générale que celle de Riemann : toute fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable et alors les deux intégrales coïncident. La fonction donnée par Dirichlet qui vaut 1 pour les rationnels et 0 pour les irrationnels n'est pas Riemann-intégrable; en revanche, elle est Lebesgue-intégrable et son intégrale est nulle.

et qui exprime le fait que dérivation et intégration sont des opérations réciproques. Or, depuis 1870, on avait exhibé des fonctions ayant des dérivées bornées non Riemann-intégrables. Le théorème fondamental n'avait plus de sens pour ces fonctions.

La théorie de Lebesgue éclaire bien des difficultés des discussions du XIX^e siècle (notamment sur les propriétés de différentiabilité des fonctions continues) et fournit un cadre général simplifié à de nombreux théorèmes alors que la théorie de Riemann multiplie les hypothèses et les conditions restrictives. Par exemple, « une fonction continue à variation bornée possède une dérivée finie presque partout » (c'est-à-dire sauf peut-être sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle); citons aussi la pierre angulaire de la théorie de Lebesgue, le théorème de *convergence dominée*, qui exprime, sous des hypothèses très larges, que :

$$\int \lim f_k(x) dx = \lim \int f_k(x) dx;$$

et, un peu plus tard, le théorème de Fubini-Lebesgue concernant les intégrales multiples de fonctions Lebesgue-intégrables quelconques, peut se résumer en :

$$\int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dy = \iint_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p} f(x, y) dx dy.$$

La théorie de Lebesgue devait s'appliquer avec grand succès aux séries trigonométriques, aux équations intégrales, aux espaces fonctionnels... (Fatou, Riesz, Fischer...).

En effet, toute cette évolution s'est accompagnée de l'idée qu'on doit manipuler les fonctions comme des objets mathématiques en soi, des points de nouveaux espaces, les *espaces fonctionnels*. Avec l'extension du langage ensembliste, il devient naturel d'employer un langage géométrique à propos de ces espaces.

Puis ces points de l'espace fonctionnel vont varier, et la distinction entre diverses sortes de convergence d'une suite de fonctions vers une limite conduit à l'idée générale de topologie sur un espace fonctionnel.

Enfin, à partir de 1900, les méthodes de l'algèbre vont investir largement l'analyse; les principes de l'algèbre linéaire sont constamment utilisés dans l'étude de certains ensembles de fonctions, des espaces normés (les espaces L^p en particulier), etc.

Mais cela est encore une autre histoire, celle de l'analyse fonctionnelle du XX^e siècle.

Ouvrages originaux d'accès aisé

Alembert J. d', *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* (en particulier l'article « Limite »).

Archimède, *De la quadrature de la parabole*, *Œuvres*, trad. Peyrard, Paris, 1807.

Baire R., *Leçons sur les fonctions discontinues professées au Collège de France*, Paris, 1905.

- Cauchy A.-L., *Cours d'algèbre de l'École royale polytechnique*. 1^{re} partie. « Analyse algébrique », Paris, 1821 (ou *Œuvres complètes*, 2^e s., t. III).
- *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823 (ou *Œuvres complètes*, 2^e s., t. IV).
- *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, 1829 (ou *Œuvres complètes*, 2^e s., t. IV).
- *Équations différentielles ordinaires*, cours inédit, introduction C. Gilain, Paris, Études Vivantes, Collection « Academic Press », 1981.
- Dedekind R., *Les nombres*. — *Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* trad. française, Paris, (Bibliothèque d'Ornicar ?), 1979.
- Descartes R., *La Géométrie*, réimprimé par Dover Publication, New York, 1954. Nouvelle édition aux Éditions π , Nantes, 1984.
- Euclide, *Le Livre V des « Éléments » d'Euclide*, trad. Peyrard, Paris, 1809.
- Euler L., *Introduction à l'analyse infinitésimale*, trad. J.-B. Labey, Paris, 1835.
- Fourier J.-B., *Théorie analytique de la chaleur*, *Œuvres*, Paris, 1888, t. I.
- Galilée G., *Discours et Démonstration mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, intr., trad., notes par M. Clavelin, Paris, A. Colin, 1970.
- Lacroix S.-F., *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Paris, 1791.
- Lagrange J.-L., *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel*. Paris, 1797 (ou *Œuvres*, t. IX).
- *Leçons sur le calcul des fonctions*, Paris, 1808 (ou *Œuvres*, t. X).
- Lebesgue H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1928, 2^e éd.
- L'Hospital (marquis de), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris, 1715, 2^e éd.
- Newton I., *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. N. de Buffon, Paris, 1740, réédition par A. Blanchard, 1966.
- Riemann B., *Œuvres mathématiques*, trad. L. Laugel, Paris, 1898.

- Vuillemin J., *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Paris, PUF, 1960.
- Youshkevitch A. P., *The Concept of function up to the middle of the 19th century*. Archive for History of Exact Sciences, 1976, vol. 16, n° 1.
- *Remarques sur la méthode antique d'exhaustion in Melanges Koyré I*, Paris, Hermann, 1964.
- *Les Mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*, Paris, Vrin, 1976.
- Zeuthen H. G., *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen Age*, Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Quelques références qui nous ont particulièrement guidées

- Boyer C. B., *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, Dover, 1949.
- Cavailles J., *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962.
- Dhombres J., *Nombre, Mesure et Continu. Épistémologie et histoire*, publication de l'IREM de Nantes, Paris, Cedic, 1978.
- Dugac P., *Les Fondements de l'analyse de Cauchy à Baire*, thèse, Paris, 1978.
- Hadamard J., *Le Calcul fonctionnel*, *Œuvres*, t. IV.
- Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P., Sansuc J.-J., *Philosophie et Calcul de l'infini*, Paris, F. Maspero, 1976.
- Itard J., *Fermat, précurseur du calcul différentiel*, archives internationales d'histoire des sciences, 1948.
- Le Rest E., *Le Concept de tangente d'Euclide à Newton et à Leibniz*, recueil de textes, UV enseignement des mathématiques, université de Haute-Normandie.
- Monna A. F., *The Concept of Function in the 19th and 20th centuries in particular with regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue*, Archive for History of Exact Sciences, 1972, vol. 9, n° 1.
- Peiffer J., *Les Premiers Exposés globaux de la théorie des fonctions de Cauchy*, thèse, Paris, 1978.
- Van Dalen et Monna, *Sets and Integration. An outline of the development*. Ed. Woltersnoord, Vill Grommugen.
- Verley J.-L., *La Controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*. « Bulletin de l'APM », n° 34, septembre 1975.

7. Au carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie : les nombres complexes

Les nombres complexes sont un objet mathématique simple présent dans de nombreux domaines de mathématiques. Nous avons choisi d'en détailler l'histoire, qui a soulevé des problèmes épistémologiques profonds. En effet, premier objet produit d'une construction abstraite, les nombres imaginaires posent aux géomètres des problèmes d'existence et de statut. Comment justifier de leur «réalité»?

De la réponse à cette question naissent de nouveaux objets algébriques, de nouvelles théories tant en algèbre qu'en analyse.

La lecture de ce chapitre peut être considérée comme une introduction à celle du chapitre 8.

1. Le théorème fondamental de l'algèbre

Avec la résolution des équations du 3^e et du 4^e degré, les nombres *impossibles* (racines carrées de nombres négatifs) avaient fourni des méthodes de calcul de nature assez mystérieuse, mais qui permettaient d'obtenir des résultats cohérents. Pour ces raisons empiriques, les mathématiciens les utilisent avec une confiance croissante. D'autre part, grâce aux progrès qu'il avait apportés à la notation algébrique, Viète avait exprimé les relations liant les coefficients et les racines d'une équation (1646). Il avait construit une équation du 5^e degré ayant cinq racines et savait qu'on peut construire de la même façon une équation de degré n ayant n racines, distinctes ou confondues.

C'est Albert de Girard qui, le premier en 1629, dans *l'Invention nouvelle en l'algèbre*, affirme que toute équation de degré n a n racines exactement, à condition de compter les racines impossibles, chacune avec son ordre de multiplicité. Cela n'est qu'une affirmation, et il faudra attendre plus d'un siècle pour que les mathématiciens éprouvent le besoin de démontrer ce résultat.

Descartes, par exemple, écrit en 1637 dans *la Géométrie* : « Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité

qui corresponde à celle qu'on imagine... » Notons que le terme d'*imaginaire* est ici utilisé pour la première fois : Descartes l'entend au sens de racine *idéale*, sorte d'adjonction formelle qu'il effectue, comme poussé par une soif de généralisation à partir du cas où l'équation est donnée sous la forme $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$, c'est-à-dire le cas où les racines sont connues *a priori*.

Dès son origine, une ambiguïté préside à l'apparition de ce terme d'*imaginaire* : entre, d'une part, l'acception idéale de Descartes ou même d'Albert de Girard et, d'autre part, les nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$, avec a, b réels, qui interviennent dans les résolutions des équations de bas degré, découvertes par les algébristes italiens et qu'on prend l'habitude d'appeler nombres imaginaires. Cette ambiguïté sera présente dans toutes les tentatives de démonstrations du XVIII^e siècle de ce qu'on a appelé le théorème fondamental de l'algèbre, c'est-à-dire la décomposition d'un polynôme réel en facteurs du premier et du second degré, puis la décomposition d'un polynôme complexe de degré n en n facteurs du premier degré.

Pour comprendre cette dénomination de théorème *fondamental* de l'algèbre, il faut se rappeler que celle-ci n'a été, jusqu'à la moitié du XIX^e siècle, que « l'analyse des équations » et se préoccupait des méthodes de leur résolution explicite, des méthodes d'approximation et d'encadrement des racines quand on ne sait pas les calculer, des règles pour déterminer le nombre de celles qui sont réelles, leur signe, etc. On comprend mieux, dans ces conditions, l'importance d'un tel théorème. D'ailleurs, deux faits illustrent ce qualificatif de « *fondamental* » :

1) la quantité de démonstrations auxquelles il a donné lieu témoigne de l'intérêt que lui ont porté les mathématiciens; parmi les plus grands d'Alembert, Euler, Lagrange, Gauss, etc.;

2) la variété des méthodes, des théories, des concepts qui s'y sont attachés, et dont nous ne pouvons donner ici qu'une très faible idée, indique le très grand rôle qu'il a joué dans l'évolution des recherches mathématiques.

Les tentatives de démonstration au XVIII^e siècle

Dans un premier temps, on cherche plutôt à établir les formules générales qui donneraient les racines, plutôt qu'à démontrer leur *existence* sans les calculer. Les difficultés étant évidemment très grandes, puisqu'on sait depuis Abel et Galois qu'une équation de degré supérieur ou égal à cinq n'est pas en général résoluble par radicaux, le problème est délaissé. En fait, les succès de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal accaparent l'intérêt des savants. C'est une question d'analyse qui repose le problème de l'existence des racines. En effet, l'intégration des fractions rationnelles suivant la méthode de Leibniz et de Jean Bernoulli nécessite la décomposition des fractions en éléments simples, autrement dit la décomposition d'un polynôme en facteurs réels du premier et du second degré (cf. encadré 1). D'Alembert est le premier à dire qu'il faut *démontrer* l'existence de cette décomposition (1746), qui ainsi acquiert le statut de *théorème*.

1. Exemple de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Soit la fraction rationnelle :

$$F = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Or $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x - i)(x + i)$.

La décomposition en éléments simples de F s'écrit :

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{dans } \mathbf{R}(x),$$

ou :

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + i} + \frac{1}{x - i} \quad \text{dans } \mathbf{C}(x).$$

D'ailleurs, d'Alembert a en vue un résultat d'analyse et ne s'occupe pas à ce moment de théorie des équations. Sa démonstration est de type analytique, elle repose sur la considération de courbes et de suites infinies. Le procédé est très moderne : utiliser des méthodes d'un domaine des mathématiques pour démontrer un résultat dans un autre domaine, mais il ne satisfait pas ses contemporains.

Pour Euler, le chevalier de Foncenex, puis Lagrange, ce théorème étant un théorème d'algèbre exigeait un raisonnement tiré de la nature même des équations. Tous les trois proposèrent des démonstrations de nature algébrique, respectivement en 1749, 1759 et 1771. Néanmoins, il est impossible de donner une démonstration purement algébrique de ce théorème et il faut utiliser la notion de « *continu* » de la droite réelle. Cette partie de la démonstration, appelée transcendantale chez les mathématiciens du XVIII^e siècle, est en général esquissée. Elle peut se réduire au minimum, c'est-à-dire à la proposition : « *Toute équation algébrique à coefficients réels de degré impair admet toujours au moins une racine réelle* », qui est alors considérée comme une évidence géométrique (cf. encadré 2).

La partie algébrique de la démonstration consiste ensuite à ramener le cas de l'équation de degré quelconque n à celui d'une équation de degré impair. Pour cela, Euler écrit le degré n du polynôme $P(x)$ sous la forme $2^m q$, où q est impair et raisonne par récurrence sur m , puisque le résultat est admis pour $m = 0$.

Son idée est de décomposer $P = P_1 P_2$ en deux polynômes P_1, P_2 de degrés $2^{m-1} q$, ce qui lui permettrait de conclure, mais sa démonstration n'est qu'une esquisse. Lagrange la reprendra de façon plus systématique et, à cette occasion, il utilise des résultats sur les fonctions semblables des racines, c'est-à-dire des fonctions rationnelles des racines qui restent invariantes par les mêmes permutations (cf. chapitre 3, page 116 et encart 13); résultats qu'il a établis dans son fameux mémoire de 1771 et qui peuvent être considérés comme les premiers de la théorie des groupes.

2. Partie transcendantale du théorème fondamental de l'algèbre

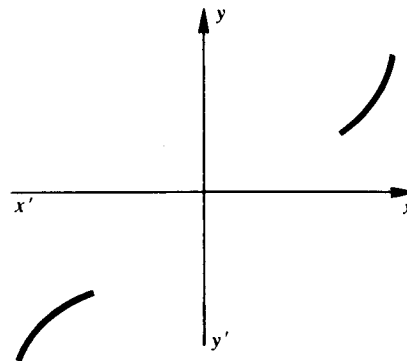
On considère un polynôme $P(x)$ de degré impair, dont on peut toujours supposer le coefficient du terme de plus haut degré égal à 1.

$$P(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0.$$

Quand x est très grand en valeur absolue, $P(x)$ se comporte comme son terme de plus haut degré.

$$\begin{aligned} \text{Donc, si } x &\rightarrow +\infty, & x^{2n+1} &\rightarrow +\infty, \\ \text{si } x &\rightarrow -\infty, & x^{2n+1} &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Les géomètres du XVIII^e siècle invoquaient un principe de « continuité » en affirmant que la courbe représentative de $P(x)$ étant au-dessus de l'axe x quand $x \rightarrow +\infty$, et au-dessous quand $x \rightarrow -\infty$, cette courbe coupe cet axe au moins une fois.



Aujourd'hui, il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires démontré par Bolzano en 1817, et qui repose sur la propriété topologique de continuité de la droite réelle.

S'il existe x_1 tel que $P(x_1) > 0$ et x_2 tel que $P(x_2) < 0$, alors il existe x_3 entre x_1 et x_2 tel que $P(x_3) = 0$.

La critique de Gauss

Sans entrer dans le détail de toutes ces méthodes, indiquons qu'elles reposent toutes, comme l'a montré plus tard Gauss, sur le postulat implicite suivant : toute équation à coefficients réels de degré n a effectivement n racines, on peut calculer avec ces racines comme avec des nombres et il faut seulement prouver que les racines sont de la forme $a + b\sqrt{-1}$ (a et b étant réels).

Gauss, qui a publié à partir de 1799 quatre démonstrations distinctes du théorème fondamental de l'algèbre, a fait une critique très vive de ce postulat sous-jacent. Dans sa dissertation inaugurale de 1799, il qualifie le raisonnement de ses prédécesseurs de « cercle vicieux » et l'analyse ainsi : « *L'hypothèse à la base de la démonstration, l'axiome, est que toute équation possède effectivement n racines possibles ou impossibles. Si l'on entend par possibles : réelles, et par impossibles, "complexes", cet axiome est inadmissible puisque c'est justement ce qu'il s'agit de démontrer. Mais si l'on entend par possibles les quantités réelles et complexes et par impossibles tout ce qui manque pour qu'on ait exactement n racines, cet axiome est acceptable. Impossible signifie alors quantité qui n'existe pas dans tout le domaine des grandeurs.* » Dans ce dernier cas, Gauss ne se permet pas de calculer sur ces quantités et, en particulier, il exclut l'utilisation des relations entre coefficients et racines. Car, pour utiliser les racines idéales et calculer avec elles, il faut au préalable avoir montré qu'elles sont dans un corps, c'est-à-dire que les quatre opérations fondamentales donnent des résultats contenus dans le même domaine de grandeurs. C'est ce qui échappa aux contemporains d'Euler. Ce qui sauve *a posteriori* les démonstrations du XVIII^e siècle du cercle vicieux indiqué par Gauss, c'est que l'hypothèse est juste et qu'on peut effectivement montrer que ces racines sont dans un corps, et cela indépendamment du théorème fondamental : c'est ce qu'on appelle le corps de décomposition pour une équation algébrique, c'est-à-dire le plus petit corps contenant les coefficients du polynôme et dans lequel celui-ci se décompose en produit de facteurs du premier degré (cf. encadré 3). La deuxième démonstration de Gauss (1815) annonce la construction de ce corps, qui sera tout à fait explicité par Kronecker (1882).

3. Exemples de corps de décomposition de polynômes

Le polynôme $x^2 - 2$ est irréductible dans le corps des rationnels. Ses racines sont $+\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Son corps de décomposition est le plus petit corps contenant les rationnels et $\sqrt{2}$. On le note $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et ses éléments sont de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a, b rationnels.

Le polynôme $x^4 - 4$, qui se factorise en :

$$(x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}),$$

a pour corps de décomposition le plus petit corps contenant \mathbb{Q} , $\sqrt{2}$ et i . On le note $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Ses éléments sont de la forme $a + b\sqrt{2} + ci + di\sqrt{2}$, avec a, b, c, d rationnels.

Ainsi, le théorème a bien été le théorème fondamental de l'algèbre, parce qu'il a concentré tous les problèmes qui se posaient avec la théorie des équations; les différentes démonstrations font référence à toutes les recherches algébriques du XVIII^e siècle et s'enracinent dans les théories les plus diverses. On y voit affleurer les premiers éléments qui formeront la base de la théorie des groupes (chez Lagrange), de la théorie des corps (chez Gauss).

Il cessera d'apparaître comme le théorème fondamental lorsque ces théories se développeront pour elles-mêmes, indépendamment de la théorie des équations. Ainsi, l'énoncé qu'on lui substitue aujourd'hui, c'est-à-dire : « *C est algébriquement clos* » souligne bien qu'il s'agit d'une propriété de la structure du corps des complexes \mathbb{C} , et non une propriété relevant de l'essence de l'être mathématique *équation*. On voit sur ce cas particulier comment une formulation différente d'un même résultat révèle une problématique différente, une époque différente.

2. La manipulation du symbole $\sqrt{-1}$ aux XVII^e et XVIII^e siècles

A partir de la deuxième moitié du XVII^e siècle, les géomètres utilisent de façon de plus en plus courante le symbole $\sqrt{-1}$ non seulement dans les identités algébriques et les recherches relatives à la théorie des équations, mais aussi dans les diverses fonctions de l'analyse. Des expressions de la forme générale :

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}},$$

qui sont imaginaires en apparence mais en fait égales à des nombres réels, expressions analogues à l'exemple de Bombelli le plus anciennement connu :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4,$$

sont l'objet de recherches de Leibniz. Il réussit à y éliminer les imaginaires en pratiquant des développements en série. Le fait que tout nombre réel a n racines $n^{\text{ièmes}}$, dont deux au plus sont réelles, était familier aux mathématiciens de cette période. Rolle le signale expressément en 1690. Le lien entre les extractions de racines de nombres imaginaires et la division des arcs va être progressivement mis en lumière, mais sans interprétation géométrique. Ainsi, A. De Moivre (1667-1754) montre en 1738 que :

$$\sqrt[n]{\cos a + \sqrt{-1} \sin a}$$

admet n valeurs, toutes de la forme $p + q\sqrt{-1}$ et qui s'obtiennent en divisant l'arc a en n parties égales. (On pourra se reporter à l'encart 4 du chapitre 8.)

Les manipulations formelles de séries et la substitution de nombres imaginaires dans les expressions symboliques deviennent de plus en plus courantes. Mais l'hypothèse admise implicitement d'étendre aux nombres complexes les opérations des nombres réels est brutalement remise en question par la controverse des logarithmes des nombres imaginaires (cf. chapitre 6). Pourtant, cette controverse a impulsé l'étude des autres fonctions transcendentes d'un nombre imaginaire. Dès 1740, Euler considère

les exponentielles de la forme x^y où x est réel et y purement imaginaire. Il donne la formule :

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$$

et, en 1748, celle qui porte son nom :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x,$$

qui pour $x = \pi$ devient $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$.

Euler identifie donc, d'un certain point de vue, les fonctions trigonométriques aux fonctions exponentielles. Après lui, la trigonométrie cesse d'être une branche indépendante des mathématiques. Tobias Dantzig dira de la formule d'Euler qu'elle contient « *les symboles les plus importants : union mystérieuse dans laquelle l'arithmétique est représentée par 0 et 1, l'algèbre par $\sqrt{-1}$, la géométrie par π et l'analyse par e* ».

Ainsi, le symbole $\sqrt{-1}$, outre son utilité et son importance déjà reconnues en algèbre, permettait d'établir une unification entre toutes les fonctions de l'analyse. Il s'avérait un intermédiaire indispensable dans les calculs, mais ceux qui utilisent ces techniques (Euler, Laplace, etc.) s'en méfient toujours et ne les considèrent pas comme des preuves irréfutables mais comme de simples moyens de découverte.

Le statut des nombres imaginaires est loin d'être élucidé et permet bien des ambiguïtés. Nous allons suivre maintenant les différents essais de légitimation des nombres complexes qui ont été proposés au début du XIX^e siècle, et comment chacune des définitions-interprétations de ces nombres fécondera une nouvelle théorie mathématique puissante.

3. La représentation géométrique des imaginaires

Commençons par citer au niveau de la préhistoire de cette idée les suggestions de J. Wallis dans son *Traité d'algèbre* publié en 1685, qui propose d'interpréter les racines imaginaires d'une équation du second degré « *en allant en dehors de la ligne où, si elles étaient réelles, elles seraient mesurées* » et il donne une construction des solutions des équations de degré deux, les solutions réelles étant sur une droite et les imaginaires à l'extérieur de cette droite. Puis, au début du XVIII^e siècle, Stirling utilise une représentation plutôt graphique que géométrique, de la forme $\frac{a}{b}$ pour $a + b\sqrt{-1}$, mais

sans considérer le point extrémité de ce graphique. Il faudra près d'un siècle pour passer de ce stade à la vraie représentation géométrique.

Rappelons en quoi elle consiste : à chaque nombre complexe $z = a + bi$, on fait correspondre un point M du plan, plan muni de deux axes rectangulaires. Le point M est donc repéré par ses coordonnées cartésiennes rectangulaires : son abscisse a et son ordonnée b . Les nombres réels a ont leur image sur l'axe Ox, les nombres imaginaires purs ib ont leur image sur l'axe Oy. En particulier i a pour coordonnées 0 et 1.

Dans le repérage des coordonnées polaires, M est caractérisé par la longueur du rayon-vecteur OM qu'on peut désigner par ρ ($\rho \geq 0$) et par l'une des déterminations de l'angle θ que OM fait avec Ox. ρ est appelé le module de z , θ l'argument de z . On a $z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.

La somme de deux complexes z, z' est représentée par la somme vectorielle des deux vecteurs \overline{OM} et $\overline{OM'}$ correspondants. Le produit de deux nombres complexes a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments (cf. fig. 1). Multiplier un nombre complexe z par un autre complexe z' , c'est faire subir au vecteur OM correspondant à z la similitude directe de centre O, définie par ρ' et θ' , c'est-à-dire que ρ' est son rapport d'homothétie et θ' son angle de rotation. En particulier, multiplier par le nombre imaginaire i , revient à faire subir à OM une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, le

rapport d'homothétie étant ici égal à 1. Ainsi le signe i reçoit l'interprétation d'un opérateur de perpendicularité. Mais à l'origine, bien entendu, ce ne sont pas les principes du calcul vectoriel et la notion de correspondance biunivoque qui ont fondé la représentation géométrique des nombres imaginaires, c'est la maturation de cette représentation qui les a suscités.

Deux caractères marquent la découverte de la représentation géométrique des imaginaires :

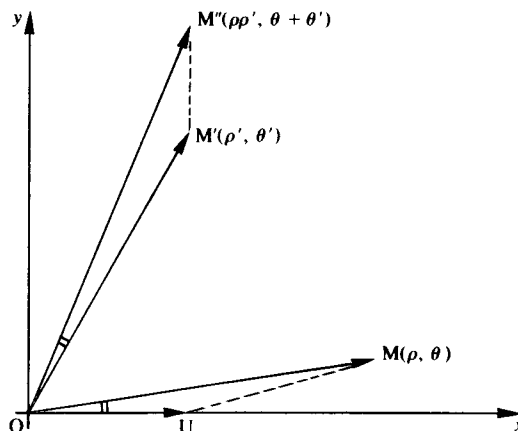
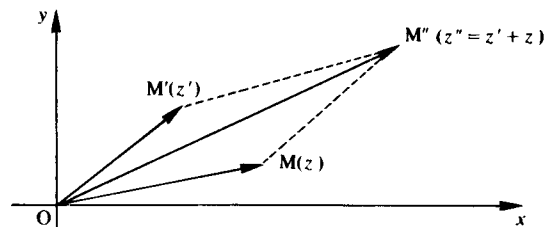


Fig. 7

1) la multiplicité de tentatives indépendantes mais similaires et qui sont, pour la plupart, le fait de mathématiciens amateurs, en marge de la communauté mathématique;

2) la réserve avec laquelle certains mathématiciens parmi les plus grands ont accueilli ces tentatives; le cas de Gauss méritant qu'on s'y attarde en particulier.

Le premier Mémoire sur le sujet est celui d'un Danois, Caspar Wessel, présenté en 1797, mais il ne sera connu qu'un siècle plus tard. En 1806, et de manière indépendante, un Genevois, Robert Argand, publia un *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, et un Anglais, l'abbé Buée, un Mémoire moins important mais comprenant des idées analogues.

Ce n'est qu'en 1813-1814 que le livre d'Argand fut connu, à l'occasion de la parution d'un article de Français dans *les Annales* de Gergonne. Argand revendiquera la paternité de son idée, et une discussion a lieu dans *les Annales* entre Français, Servois et Gergonne. Pourtant, malgré cette discussion dans un journal connu et lu des mathématiciens, ces idées passèrent inaperçues. En 1828, Warren en Angleterre et Mourey en France — chacun de leur côté et sans liaison, semble-t-il, avec le travail d'Argand — réinventent le principe de la représentation et sans fixer davantage l'attention des plus grands mathématiciens. Ce ne sera qu'après que Gauss en 1831 et Cauchy très tardivement, en 1847, l'eurent adoptée qu'elle s'imposa vraiment.

Comment s'expliquer qu'une découverte si neuve et importante et qui fécondera la nouvelle théorie des fonctions de la variable complexe dont Cauchy est le créateur ait pu passer si longtemps inaperçue?

4. Réalisme géométrique contre formalisme de l'algèbre symbolique

Outre le fait qu'Argand et ses émules n'étaient pas des mathématiciens prestigieux, la raison profonde de cette résistance est ailleurs : ces premiers exposés, qui posent explicitement l'idée de la correspondance entre les complexes et les points du plan, considèrent la représentation géométrique comme fournissant ce que S. Bachelard* appelle le « *substrat intuitif* », qui manquait jusque-là aux symboles dépourvus de sens et toujours un peu suspects qu'étaient les nombres imaginaires, leur conférant ainsi une existence légitime. Voici comment Mourey introduit son étude : « ... *que doit-on dire des imaginaires? Pour un esprit qui tient à voir clair, n'ont-elles pas quelque chose de repoussant?... On doit convenir que la science serait beaucoup plus satisfaisante si l'on pouvait en baser toutes les parties sur des raisonnements rigoureux, sur une évidence de premier ordre, sur des idées simples, palpables comme celles des éléments de géométrie* ».

Voici une idée de la méthode d'Argand; il commence par justifier la représentation des nombres négatifs, dans lesquels il y a l'idée de grandeur absolue et l'idée de direction. Puis il cherche « *un genre de grandeur auquel*

peut s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci à la direction négative ». Il propose la direction perpendiculaire : « *Toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, et celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires où de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire* ». Ainsi, les réels et les imaginaires sont de même nature et il n'y a plus lieu d'utiliser le mot imaginaire : « *Ces lignes sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive* ». Argand utilise ses « *lignes dirigées* » comme des vecteurs. L'addition de deux lignes dirigées se fait comme l'addition des vecteurs. De même pour le produit, on multiplie les modules et on additionne les angles par rapport à une direction origine qui est celle des réels. Il justifie sa méthode en redémontrant les formules trigonométriques usuelles.

De même que Wessel, il essaye de généraliser sa méthode à l'espace en ajoutant une troisième direction perpendiculaire au plan formé par les deux premières (réels et imaginaires) mais sans succès. L'un des principaux mérites de cette représentation semble être son caractère « *sensible aux yeux* ».

Or ce point de vue qu'on peut qualifier de réalisme géométrique heurte, par exemple, Servois, qui se rattache aux algébristes de l'école de Cambridge. Ceux-ci avaient comme exigence première la *pureté* de la science algébrique, science des symboles et de leurs combinaisons, indépendante même de l'arithmétique et, *a fortiori*, de toute formulation géométrique (cf. chapitre 8). Ainsi Servois, dans une lettre de 1813 publiée par *les Annales* de Gergonne, oppose l'objection suivante à la méthode d'Argand : « *Pour moi, j'avoue que je ne vois dans cette notation qu'un masque géométrique appliqué sur des formes analytiques dont l'usage immédiat me semble plus simple et plus expéditif* ».

Quant à Cauchy, qui a dominé l'école mathématique française de la première moitié du XIX^e siècle, il a été, dès son *Cours d'analyse* à l'École polytechnique de 1821, très préoccupé du statut des imaginaires. Il trouvait que leur théorie reposait sur des « *principes qui manquent de clarté* ».

Cauchy adopte une présentation extrêmement formaliste de ces nombres. Pour lui, un nombre imaginaire est une « *expression symbolique* » qui n'a pas de sens en elle-même, mais qui est soumise à des « *règles fixes* » selon des « *conventions établies* ». Pourtant, la conception symbolique et formaliste de Cauchy n'a rien à voir avec celle de l'école anglaise, où toutes les opérations sur les symboles sont jugées possibles, pourvu qu'on en ait auparavant défini les lois, et indépendamment des propriétés des nombres réels et complexes. Cauchy, lui, garde toujours le souci de la validité des formules et de la nature des êtres mathématiques qu'il manipule.

Cauchy ne se ralliera explicitement à la représentation géométrique qu'en 1847. A ce moment, il a lu en particulier un Mémoire de Barré de Saint-Venant qui annonce les principes du calcul vectoriel, et s'est convaincu que la « *notion de quantité géométrique* — et un complexe en est une, de dimension deux — *comprendra comme cas particulier la notion de quantité algébrique* ». Cauchy est persuadé qu'un vrai *calcul géométrique* est une possibilité ouverte

*Nous suivons dans cette partie l'analyse de M^{lle} S. Bachelard citée dans la bibliographie.

(cf. chapitre 8). L'analyste qui répugnait au recours impur à la géométrie peut alors accepter la représentation géométrique comme théorie fondatrice.

5. Le véritable initiateur : Gauss

Nous avons vu à propos du théorème fondamental de l'algèbre que Gauss a été le premier mathématicien à avoir une idée très claire du statut des imaginaires.

Il semble que Gauss avait l'idée de la représentation géométrique dès 1799 quand, dans sa dissertation inaugurale, il tente une très belle démonstration de pure topologie appliquée à la résolution du théorème fondamental de l'algèbre. Partant d'un polynôme P de la variable complexe z , il veut montrer qu'il a au moins une racine z_0 .

Il écrit $P(z) = P(x + iy) = R(x, y) + iS(x, y)$, où R et S sont des polynômes à deux variables x et y , et remarque que les points (x_0, y_0) du plan tels que $x_0 + iy_0$ soit racine de P , sont les intersections des courbes $R = 0$ et $S = 0$. Par une étude qualitative de ces courbes, il montre alors qu'un arc continu de l'une d'elles joint des points de deux régions distinctes limitées par l'autre et en conclut que les courbes se rencontrent. Mais il ne définit pas encore explicitement la correspondance entre points du plan et nombres complexes.

La lettre devenue célèbre de Gauss à Bessel, datée de 1811, est, elle, très nette. Parlant des intégrales finies entre des limites imaginaires, Gauss écrit : «...de même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles au moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se représenter le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini; où chaque point déterminé par son abscisse a et son ordonnée b , représente en même temps la quantité $a + bi$. Le passage continu d'une valeur de x à une autre $a + bi$ se fait par conséquent suivant une ligne, et peut donc s'effectuer d'une infinité de manières ».

En fait, on sait par l'étude de sa correspondance et celle de ses papiers posthumes que Gauss était sensible au caractère pédagogique de la représentation géométrique et qu'on peut le ranger parmi les adeptes d'un certain réalisme géométrique. Gauss est incontestablement le premier à percevoir le rôle que pourrait avoir la représentation géométrique comme moyen *methodique* dans le domaine de l'analyse et le parti que pourraient en tirer les mathématiciens du XIX^e siècle.

Mais Gauss n'a jamais été pressé de publier les résultats auxquels il était parvenu, surtout quand il pressentait la richesse d'une théorie qu'il n'avait pas encore suffisamment dominée. Il fera une exposition publique de ses idées à partir de 1830 et en particulier dans le Mémoire *Theoria Residuorum Biquadraticorum* de 1831. Là, il a longuement étudié les nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs qu'on appelle aujourd'hui *entiers de Gauss*. Il en a fait un traitement purement arithmétique mais en a suggéré aussi une figuration intuitive par un réseau de mailles carrées dans le plan. La représentation géométrique des complexes allait conquérir droit de cité.

Universellement adoptée vers la fin des années 1840, elle suscitera le

développement prodigieux de la théorie des fonctions d'une variable complexe, l'intégration complexe, etc., puis une extension géniale de Riemann où la variable complexe z , au lieu de décrire un plan, décrit une surface à portions superposées.

6. Le point de vue arithmétique de Hamilton

La théorie géométrique des nombres complexes semblait présenter l'inconvénient de subordonner toutes les propriétés algébriques de ces nombres à des considérations géométriques qui peuvent paraître étrangères à la question. C'est, par exemple, le reproche fait par J. Bolyai à la théorie de Gauss.

Le mathématicien irlandais William R. Hamilton (1805-1866), qui s'est posé des problèmes à propos des fondements de l'arithmétique et de l'algèbre et a cherché à les construire sur la considération du temps « pur » — ce temps si important en Angleterre depuis Newton —, a élaboré une théorie arithmétique des nombres complexes vers 1835. Celle-ci consiste à considérer ces nombres comme des couples de nombres réels et à définir, explicitement, la somme et le produit de tels couples par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

Les réels sont identifiés aux couples $(a, 0)$ et l'on a :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0) \times (0, 1).$$

Il appelle le couple $(1, 0)$ l'unité primaire et le couple $(0, 1)$ l'unité secondaire, et on peut alors identifier (a, b) avec $a + b\sqrt{-1}$. A propos de l'équation à deux inconnues $(x, y)^2 = (-1, 0)$, qui a pour solution le couple $(0, 1)$, Hamilton écrit : « Dans la théorie des nombres simples, le symbole $\sqrt{-1}$ est absurde, mais dans la théorie des couples le même symbole $\sqrt{-1}$ a un sens et indique une extraction possible, ou un couple réel, à savoir la racine carrée principale du couple $(-1, 0)$. Dans cette dernière théorie, on peut donc employer le signe $\sqrt{-1}$ bien qu'on ne le puisse pas dans la première. » Ainsi Hamilton est satisfait d'avoir *contourné* l'obstacle que constituait l'écriture de la racine carrée d'un nombre négatif et de s'être dispensé du mystérieux $\sqrt{-1}$.

Ce point de vue conduit Hamilton à essayer de définir des opérations d'addition et de multiplication, pour des triplets de nombres réels, de telle sorte que les opérations définies jouissent des mêmes propriétés que celles du même nom pour les réels (associativité et commutativité des deux opérations, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). Pendant plusieurs années, il cherche en vain à élaborer ce calcul algébrique sur des nombres complexes tridimensionnels.

Mais, en contradiction avec son propos philosophique de départ, il attache une grande importance à l'interprétation géométrique de ce calcul algébrique dans l'espace à trois dimensions. D'ailleurs, plusieurs autres

mathématiciens, tels Wessel, Gauss, Servois, Möbius, ont travaillé sur le même problème, à peu près à cette époque. S'appuyant sur le fait que les nombres complexes et les lois algébriques suppléaient aux opérations sur les vecteurs dans le plan, ils ont cherché à trouver quelque chose d'analogue dans la dimension trois.

Après plusieurs années d'efforts, Hamilton fut obligé à deux compromis : le premier était que ces nouveaux nombres seraient des quadruplets, c'est-à-dire auraient quatre composantes et non pas trois, le deuxième qu'il fallait abandonner la commutativité de la loi de la multiplication. Il appelait ces nouveaux nombres, des « quaternions » (cf. encadré 4).

4. La nature des quaternions

On peut considérer les quaternions comme des quadruplets (a, b, c, d) ou les définir comme des combinaisons linéaires de quatre unités e, i, j, k à coefficients réels.

Un quaternion s'écrit $q = ae + bi + cj + dk$
 e est une unité qui vaut 1;
 i, j, k sont des unités qui vérifient :

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= k & ji &= -k \\ jk &= i & kj &= -i \\ ki &= j & ik &= -j \end{aligned}$$

a, b, c, d sont des réels;

i, j, k ne s'additionnent pas entre eux.

On peut définir $\bar{q} = a - bi - cj - dk$
 et on vérifie que $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

L'inverse d'un quaternion q est le quaternion

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{-1} \cdot \bar{q}.$$

Les quaternions forment un corps non commutatif, dont le corps \mathbb{C} des nombres complexes est un sous-corps. Ils forment aussi un espace vectoriel à quatre dimensions sur le corps des réels \mathbb{R} . On a ainsi une algèbre de dimension quatre sur \mathbb{R} .

D'un point de vue géométrique, on peut expliquer que les nouveaux nombres aient quatre composantes : en effet, considérés comme des opérateurs de l'espace \mathbb{R}^3 , ils doivent faire subir à tout vecteur de \mathbb{R}^3 une rotation autour d'un axe donné, puis multiplier le vecteur par un scalaire. Ce qui est analogue au fait que les complexes sont les opérateurs de similitude dans le plan \mathbb{R}^2 . Or, il faut deux paramètres, qui sont deux angles, pour fixer l'axe de rotation, un paramètre pour spécifier l'angle de rotation et un paramètre pour la multiplication par le scalaire.

Quant au caractère non commutatif de la multiplication, il est révolutionnaire pour l'époque et va constituer un pas important, sur le plan des idées, vers la notion générale de loi de composition. C'est d'ailleurs dans

le même Mémoire qu'est utilisé pour la première fois le terme d'associativité pour exprimer qu'une opération, notée \times , vérifie la relation :

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

Plus tard, Cayley, en abandonnant l'associativité pour la multiplication, construit une généralisation des quaternions, les *octaves de Cayley*, qui sont des n -uplets à huit composantes munis de deux lois. Plus largement, on a beaucoup travaillé à la suite d'Hamilton, de Cayley... à la fin du XIX^e siècle sur ces systèmes de nombres qu'on appelait *hypercomplexes*, et qu'on nomme aujourd'hui les algèbres de dimension finie.

L'invention des quaternions avait été annoncée en 1843 et Hamilton passa le reste de sa vie à développer le sujet, et à chercher des applications à divers domaines des mathématiques et de la physique. Ils ont aussi contribué à la naissance du calcul vectoriel.

7. Le point de vue algébrique des congruences de Cauchy

En 1847, et bien qu'il soit sur le point d'adopter enfin la représentation géométrique, Cauchy reste toujours tourmenté par les imaginaires. Il présente une nouvelle théorie, dite des « équivalences algébriques », qu'il introduit ainsi : » *Mais il est évident que la théorie des imaginaires deviendrait beaucoup plus claire encore et beaucoup plus facile à saisir, qu'elle pourrait être mise à la portée de toutes les intelligences si l'on parvenait à réduire les expressions imaginaires, et la lettre i elle-même, à n'être plus que des quantités réelles.* »

Cauchy fait référence à un récent mémoire d'un mathématicien allemand Kummer et rappelle sa notation $P(x) \equiv Q(x) [\text{mod } \omega(x)]$ si les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ donnent le même reste dans la division algébrique par le polynôme $\omega(x)$. Cela est, évidemment, ce que nous appelons aujourd'hui une relation d'équivalence. Prenant le cas où $\omega(x) = x^2 + 1$, Cauchy « prend pour convention fondamentale que la lettre symbolique i , substituée à la lettre x dans une fonction entière $f(x)$ — c'est-à-dire un polynôme —, indiquera la valeur que reçoit non pas $f(x)$ mais le reste de la division algébrique de $f(x)$ par $x^2 + 1$ quand on attribue à x la valeur particulière i ».

Son point de vue consiste donc à considérer que les calculs sur les nombres complexes reviennent à calculer sur les polynômes en la variable i , soumis aux règles usuelles de l'algèbre, en remplaçant chaque fois que c'est possible $i^2 + 1$ par 0. Cela revient à dire que deux polynômes sont équivalents, c'est-à-dire définissent le même nombre complexe, si leur différence est divisible par l'expression $x^2 + 1$.

En langage contemporain, Cauchy établit un isomorphisme entre le corps des complexes \mathbb{C} et le corps résiduel des classes d'équivalence des polynômes à coefficients réels, modulo $x^2 + 1$.

Kummer et Kronecker reprendront à leur tour ce point de vue en envisageant des classes d'équivalence modulo d'autres polynômes irréductibles que $x^2 + 1$. Ce sera le point de départ de la théorie des corps de rupture des équations et de la théorie des nombres algébriques et, plus généralement, de constructions très fécondes de nouveaux objets algébriques, développées

surtout par l'école algébriste allemande de la deuxième moitié du XIX^e siècle (cf. chapitre 8).

Ainsi, à propos d'un objet mathématique précis, se révèlent la richesse de l'édifice mathématique et son incroyable diversification au cours du siècle dernier.

Un peu de vocabulaire

Imaginaire : Descartes, 1637. **Nombre $N(z)$ (carré du module)** : Gauss, 1831.

Module : Argand, 1806.

Argument : Cauchy, 1838. **Notation $|z|$ pour le module** : K. Weierstrass.

Nombre complexe : Gauss, 1831. **Notation i** : Euler, 1777, reprise par Gauss.

8. Nouveaux objets. Nouvelles lois. L'émergence des structures algébriques

Pour un lycéen ou un étudiant de cette fin du XX^e siècle, les notions ensemblistes et les structures algébriques simples (groupe, anneau, corps, espace vectoriel) font partie du bagage mathématique dispensé dès les premières années de l'enseignement secondaire. Et, pourtant, ces structures, dont certaines sont absolument fondamentales et à l'œuvre dans toutes les mathématiques, ne sont dégagées que très lentement au cours du XIX^e siècle, souvent à partir d'exemples assez compliqués par rapport à ceux auxquels notre lecteur peut être familier.

Nous venons de suivre au cours du chapitre précédent, au terme de quelles difficultés et de quelles réticences les mathématiciens ont admis l'extension du domaine numérique traditionnel aux nombres complexes. A *fortiori*, le *calcul* sur des quantités de nature différente de celle des nombres — seul modèle existant jusque-là — ensembles ou applications, ne va pas de soi et est très long à émerger. D'ailleurs, l'absence des notions ensemblistes et de leur langage, qui ne sont acquis que vers 1900, semble avoir été ici un obstacle majeur.

Nous allons suivre maintenant l'étude de quelques-uns de ces nouveaux objets mathématiques. Pendant la première moitié du XIX^e siècle, les mathématiciens ont encore tendance à y voir des phénomènes particuliers; mais, bientôt, ils constatent des analogies étroites dans leur maniement et cherchent à expliciter — ils diront beaucoup plus tard à axiomatiser — ce qu'il y a de commun à de multiples situations concrètes.

Ainsi, progressivement, l'algèbre va devenir l'étude abstraite des structures algébriques indépendamment de leurs réalisations diverses, et ce mouvement est inséparable du processus général d'axiomatisation de l'ensemble des mathématiques.

Nous n'étudierons donc pas exhaustivement les œuvres mathématiques citées dans ce chapitre mais essaierons de mettre en lumière en quoi elles participent au mouvement général que nous venons de décrire. Nous serons souvent conduits à utiliser la terminologie actuelle, très précise, évidemment postérieure à ces œuvres, mais cette nécessité montre aussi le travail des mathématiciens des générations ultérieures : préciser, cerner les notions introduites et, partant de ces concepts mieux définis, se poser des problèmes nouveaux.

1. Les Recherches arithmétiques de Gauss

Les *Disquisitiones arithmeticae*, admirable œuvre de jeunesse publiée en 1801, constituent l'acte de naissance de la théorie moderne des nombres. Elle détermine ses directions principales jusqu'à nos jours. Gauss y classe les problèmes à étudier dans ce domaine et les méthodes connues depuis Euler et Lagrange pour les aborder; enfin, y introduit de nouvelles méthodes puissantes.

Son ouvrage s'articule autour de trois idées principales : la théorie des congruences, l'introduction des nombres algébriques et la théorie des formes. Toutes trois s'avèreront très riches, du point de vue des structures implicites qui y sont à l'œuvre.

La théorie des formes

Le troisième sujet très largement développé dans les *Disquisitiones* est la théorie des formes comme étant l'idée conductrice de l'analyse diophantienne. C'est aussi à ce propos que Gauss manipule le plus nettement des lois de composition sur des ensembles et expose ainsi le premier calcul sur des objets abstraits qui ne sont plus des nombres. C'est pour cette raison que nous le traitons en premier.

Une expression $ax^2 + 2bxy + cy^2$ (avec a, b, c entiers relatifs) est une forme quadratique binaire. Un premier problème consiste à trouver l'ensemble des nombres M entiers qui sont représentables par une forme donnée (a, b, c , fixés); et le problème réciproque consiste, étant donné M, a, b, c ou une classe de nombres a, b, c , à trouver les valeurs de x et de y qui représentent M .

A ce sujet, Lagrange avait prouvé un résultat-clé : si un nombre M est représentable par une forme, il l'est aussi par beaucoup d'autres, que Lagrange appelait *équivalentes*; chacune d'entre elles étant obtenue, à partir de la forme initiale, par le changement de variable :

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y',$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers relatifs vérifiant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

(ce qu'on appelle une transformation unimodulaire à coefficients entiers).

De plus, Lagrange avait partagé les formes de discriminant donné $b^2 - ac$ en un nombre fini de classes, chaque classe étant composée de formes équivalentes à l'une d'elles.

Gauss va extraire de ces résultats la notion d'équivalence de formes et la mettre en valeur. Il considère une forme :

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

qui est transformée par :

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

en la nouvelle forme :

$$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

Alors, Gauss montre que l'on obtient :

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Si $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, les discriminants des deux formes sont égaux et, dans ce cas, il existe une transformation réciproque à coefficients entiers permettant de passer de F' à F . F et F' sont dites *équivalentes*, et cette relation constitue bien évidemment une relation d'équivalence au sens usuel actuel (réflexive, symétrique et transitive).

Par définition, deux formes équivalentes ont même discriminant. Pourtant, toutes les formes d'un même discriminant donné D ne sont pas forcément équivalentes entre elles. Gauss prouve qu'on peut les partager en un nombre fini de classes d'équivalences et, dans chacune d'elles, une forme quelconque pourra être choisie comme représentative de la classe. Ensuite, il va définir un produit de formes.

Si la forme $F = AX^2 + 2BXY + CY^2$ est transformée par la substitution $X = p_1xx' + p_2xy' + p_3x'y + p_4yy'$ et $Y = q_1xx' + q_2xy' + q_3x'y + q_4yy'$, en le produit des deux formes :

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad \text{et} \quad f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

(et moyennant une petite condition supplémentaire), Gauss écrit que F est le composé de f et f' , écrivons $F = f \star f'$.

Puis il montre le théorème essentiel suivant : si f et g sont deux formes appartenant à la même classe d'équivalence C_1 , f' et g' deux formes appartenant à une autre classe C_2 , alors $f \star f'$ et $g \star g'$ seront des formes équivalentes, appartenant à une même classe C_3 . Et Gauss écrit $C_3 = C_1 + C_2$.

Ici, il franchit un pas décisif; il note d'une seule lettre une classe de formes équivalentes qu'il va pouvoir manipuler comme un *seul* objet. De plus, la loi de composition sur ces nouveaux objets est notée additivement par Gauss, alors qu'il semblait plus naturel de la noter multiplicativement, ce qui témoigne que Gauss a une compréhension profonde de cette notion, affranchie des notations qui peuvent l'exprimer. Cette loi de composition munit l'ensemble des classes d'équivalences de formes d'un discriminant donné, d'une structure de groupe abélien fini, non cyclique¹. Il utilise cette composition des formes pour montrer que si x et y sont des solutions de $f(x, y) = n_1$, et x', y' des solutions de $f'(x', y') = n_2$, alors elles fourniront, par la substitution déjà considérée ci-dessus, des solutions X, Y à la relation $F(X, Y) = n_1 n_2$. Il obtient de nombreux résultats nouveaux, liés en particulier au théorème de Fermat.

La théorie des congruences

Deux nombres a et b sont dits congrus modulo m si leur différence est divisible par m . Les congruences modulo un nombre fixé peuvent s'ajouter, se soustraire, se multiplier. Depuis longtemps, on les utilisait dans les preuves par 7, 9 ou 11 des opérations de multiplication.

1. Un groupe est cyclique s'il est engendré par un seul élément.

On peut même chercher à résoudre une congruence contenant une inconnue. Par exemple, la congruence $3x \equiv 17 \pmod{12}$ n'a pas de solution; en revanche, la congruence $x^2 \equiv 4 \pmod{5}$ a deux solutions distinctes non congrues $x = 2$ et $x = 3$. Tous ces éléments étaient déjà connus et le théorème principal établi par Lagrange prouvait que la congruence :

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Mx + N \equiv 0 \pmod{p},$$

quand p est un nombre premier qui ne divise pas A , n'a pas plus de n racines non congrues.

Gauss standardise la notation $a \equiv b \pmod{m}$; elle sera reprise par Kummer et toute l'école allemande, mais Cauchy lui préférera le terme d'équivalence algébrique (cf. chapitre 7).

Cette relation de congruence est une relation d'équivalence qui partage l'ensemble des nombres relatifs en un nombre fini de classes. La première classe comprend tous les nombres divisibles par m , donc congrus à 0; la seconde comprend tous les nombres congrus à 1 modulo m , ..., la $m^{\text{ième}}$ tous les nombres congrus à $m - 1$ modulo m .

On peut représenter ces m classes par les symboles $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}$ et on peut y transporter les opérations d'addition et de multiplication. Ainsi, on définit une structure d'anneau sur cet ensemble noté Z/mZ . Si m est un nombre premier p , chaque élément de Z/pZ a un inverse et Z/pZ est un corps. Nous donnons en encart les tables d'opérations pour $Z/5Z$ et $Z/8Z$ (cf. encadré 1).

Euler avait exhibé les racines primitives d'une congruence modulo p : si g est une telle racine, alors tout nombre est congru modulo p à une puissance de g (c'est-à-dire le groupe multiplicatif de Z/pZ , zéro exclu, est cyclique, engendré par g , et ses éléments peuvent s'écrire $g^0 = 1, g, g^2, \dots, g^{p-1}$). Gauss reprend et étend ces résultats. Il définit des « résidus quadratiques » du corps Z/pZ : a en est un s'il existe x tel que $x^2 \equiv a \pmod{p}$ [c'est-à-dire si a possède une racine carrée dans le corps Z/pZ].

Pour résoudre l'équation $x^{17} - 1 = 0$, Gauss utilise un « isomorphisme » d'un groupe additif G_1 sur un groupe multiplicatif G_2 (celui additif des entiers modulo 16 sur celui multiplicatif des classes modulo 17), c'est-à-dire une correspondance bijective f de G_1 sur G_2 telle que $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$; et cet isomorphisme détermine un ordre — pertinent pour son problème (cf. encart 12 du chapitre 3) — dans lequel ranger les éléments de G_2 .

Bien que dans cette partie Gauss ne calcule pas directement sur les classes d'équivalence, éléments de Z/pZ , et se conforme à l'usage de son époque en manipulant les relations algébriques, on peut traduire en termes modernes de structures algébriques ses résultats.

L'apparition d'une théorie systématisée des congruences va jouer un rôle très important; avec elle vont se dégager dans les décennies suivantes les concepts de classe d'équivalence, d'ensemble quotient, les structures d'anneaux et de corps finis.

De plus, dans le cas où le module est un nombre premier p , l'analogie entre congruences et équations est très grande; le théorème de Lagrange faisant pendant au théorème fondamental de l'algèbre. Or on a vu (chapitres 3 et 7) que c'est pour la résolution algébrique des équations que les mathématiciens ont « créé » le corps des complexes. Indiquons ici que c'est

Z/5Z

Table d'addition

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Table de multiplication

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tout élément a bien un inverse. $Z/5Z$ est un corps. 2 est une racine primitive de la congruence modulo 5. En effet, 2 engendre le groupe multiplicatif de $Z/5Z$, zéro exclu.

$$\text{On a : } \bar{2}^1 = \bar{2}, \bar{2}^2 = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{3}, \bar{2}^4 = \bar{1}.$$

Z/8Z

Table de multiplication

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

On vérifie que dans cet anneau, il y a des « diviseurs de zéro » puisque $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{0}$.

Notons que $\bar{3}$ engendre le groupe additif cyclique $Z/8Z$, car :

$$\begin{aligned} \bar{3} \cdot \bar{0} &= \bar{0}, \bar{3} \cdot \bar{1} = \bar{3}, \bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6}, \\ \bar{3} \cdot \bar{3} &= \bar{1}, \bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{4}, \bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{7}, \\ \bar{3} \cdot \bar{6} &= \bar{2}, \bar{3} \cdot \bar{7} = \bar{5}. \end{aligned}$$

Il en sera de même pour $\bar{5}$ et $\bar{7}$. Gauss démontre qu'il en est ainsi car 3 est premier à 8 (de même pour 5 et 7). On pourra aussi se reporter à l'encart 4 de ce chapitre pour la démonstration, par Cauchy, de cette propriété.

pour des besoins tout à fait similaires de résolution des équations de congruence que le mathématicien français Evariste Galois eut l'idée géniale en 1829 d'introduire de nouveaux « imaginaires ». Il étudie des équations de congruence $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Dans le cas où cette congruence n'a pas de solution — il suffit pour cela de vérifier que les p nombres entiers $0, 1, 2, \dots, p-1$, substitués successivement à x dans le polynôme $F(x)$ n'en font pas un multiple de p — Galois écrit : « Il faut donc regarder les racines de cette congruence comme des espèces de symboles imaginaires puisqu'elles ne satisfont pas aux questions des nombres entiers, symboles dont l'emploi dans le calcul sera souvent aussi utile que celui de l'imaginaire $\sqrt{-1}$ dans l'analyse ordinaire... » et ces symboles satisfont aux mêmes quatre opérations que les nombres usuels.

Les idées de Galois ouvraient donc la voie à la construction de corps nouveaux, extensions algébriques des corps résiduels $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de Gauss (comme \mathbb{C} est une extension algébrique quadratique du corps \mathbb{R} des réels). Mais il faudra attendre 1870 pour que les mathématiciens assimilent les idées de Galois.

Plus tard, on pourra même démontrer que *tout corps commutatif fini est forcément un corps de ce type* imaginé par Galois. Mais, pour pouvoir penser un tel énoncé, encore faut-il, comme le dit Jean Itard, « adopter une attitude abstraite et axiomatique, postuler les propriétés requises, admettre l'existence d'un corps qui en serait pourvu, et, par une analyse serrée, retrouver les êtres conçus par l'inventeur ». Une telle démarche est inconcevable en 1800. Quand elle prédominera au début du XX^e siècle, le mathématicien sera alors en mesure d'examiner abstraitement l'impact de chacune des propriétés; ainsi Wedderburn prouva en 1905 que l'on n'a pas besoin de postuler la commutativité et que *tout corps fini est commutatif*, donc du type de Galois (extension algébrique d'un corps résiduel $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Les entiers de Gauss

En voulant généraliser sa théorie des résidus quadratiques, Gauss introduit dans les *Disquisitiones* des « entiers complexes » que l'on appelle aujourd'hui les entiers de Gauss, nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont des entiers relatifs et $i = \sqrt{-1}$. Il développera surtout cette théorie dans le Mémoire *Theoria residuorum biquadraticorum*, publié en 1832.

L'ensemble de ces nombres, noté $\mathbb{Z}[i]$, forme un anneau qui possède des propriétés arithmétiques simples assez analogues à celles de l'anneau des entiers relatifs \mathbb{Z} : existence d'un algorithme euclidien de la division identique à celui de \mathbb{Z} , et donc théorie similaire de la divisibilité, existence d'éléments inversibles ou « unités » (au nombre de quatre ± 1 et $\pm i$), existence d'éléments « premiers », c'est-à-dire d'éléments qui ne peuvent s'écrire comme produits de deux entiers de Gauss dont aucun n'est une unité; ainsi $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$ n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[i]$, alors que 3 l'est. De plus, dans $\mathbb{Z}[i]$, il y a unicité de la décomposition en éléments premiers de tout entier de Gauss.

Enfin, $\mathbb{Z}[i]$ est l'anneau des entiers du corps $\mathbb{Q}(i)$ au même sens que

l'anneau \mathbb{Z} est l'anneau des entiers du corps des rationnels \mathbb{Q} (c'est-à-dire que plonger $\mathbb{Z}[i]$ dans $\mathbb{Q}(i)$ permet de symétriser la loi du produit, et tout entier de Gauss aura alors un inverse dans $\mathbb{Q}(i)$ de la forme $r + is$, où r et s sont des rationnels relatifs).

Gauss démontre l'ensemble de ces résultats et donne la première impulsion de la théorie des nombres algébriques, que nous retrouverons avec les travaux de Kummer et de Dedekind et qui sont à l'origine de l'algèbre commutative.

Gauss et l'unité profonde des mathématiques

Dans les *Recherches arithmétiques* comme dans toute l'œuvre de Gauss se trouvent en puissance de très riches développements algébriques. Plusieurs des concepts abstraits qui formeront l'ossature de la nouvelle algèbre y affleurent : relation et classe d'équivalence, ensemble quotient, congruences, anneau et corps de classes résiduelles, corps d'extension, groupes abéliens, etc. Par exemple, la théorie des groupes abéliens finis intervient dans les *Disquisitiones* de quatre manières différentes : groupe additif des entiers modulo n , groupe multiplicatif des nombres premiers à n modulo n , groupe multiplicatif des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, groupe des classes de formes quadratiques binaires.

De plus, son point de vue est très moderne : « Le mathématicien fait complètement abstraction de la nature des objets et de la signification de leurs relations; il n'a qu'à énumérer les relations et à les comparer entre elles. » Pourtant, si les structures abondent dans l'œuvre de Gauss, elles affleurent plus qu'elles n'apparaissent. Elles y demeurent enveloppées, comme déguisées. Il est intéressant de se demander pourquoi Gauss a composé des classes d'équivalence dans le cas des formes quadratiques binaires et non dans celui des congruences modulo n . M. Dieudonné y voit une répugnance à introduire des notations non vraiment indispensables. Dans le calcul compliqué de la composition des formes quadratiques, le passage aux classes d'équivalence constitue un réel bénéfice tant sur le plan théorique que calculatoire, ce qui ne paraissait pas le cas à Gauss pour les congruences.

Gauss a eu un sens très profond de l'unité des mathématiques; il excellait à mettre en lumière des liens parfois très cachés entre diverses branches des mathématiques. C'est ainsi qu'il a proposé huit démonstrations de la loi de réciprocité quadratique, quatre du théorème fondamental de l'algèbre, relevant de parties très différentes des mathématiques, montré la relation entre nombres complexes et géométrie, entre rotations de la sphère et transformations homographiques du plan de la variable complexe, etc.

Mais cette vision profonde unitaire de Gauss ne s'appuie pas comme au XX^e siècle sur la formulation des structures explicites communes, elle va, au contraire, les susciter.

2. Groupes de substitutions et théorie de Galois

Les travaux de Cauchy

En 1815, A.-L. Cauchy publie deux Mémoires dans le *Journal de l'École polytechnique*, dans lesquels il traite du problème issu de la théorie des équations (cf. chapitre 3 : analyse du Mémoire de Lagrange de 1770-1771) : chercher le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme. Cela est d'ailleurs le titre du premier Mémoire.

Cauchy y définit les contours de l'univers conceptuel dans lequel va se développer la théorie des substitutions, puis celle des groupes. Si une fonction dépend de n variables, le nombre M de valeurs distinctes qu'elle peut prendre quand on permute ces variables est un diviseur de $n!$ et les substitutions qui laissent invariantes la fonction sont au nombre de $\frac{n!}{M}$ et forment un groupe (cf. exemple en encadré 2).

2. Substitution inaltérante d'une fonction de plusieurs variables (Cauchy 1815)

Soit la fonction $f(x, y, z) = x + y + z + x^2$.

Elle est invariante par la substitution identique et par la substitution

$$T = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}$$

qui échange y et z .

Le groupe des substitutions qui la laissent invariante est donc d'ordre 2.

La fonction peut prendre trois valeurs distinctes ($3 = \frac{3!}{2}$) qui sont :

$$\begin{aligned} x + y + z + x^2, \\ x + y + z + y^2, \\ x + y + z + z^2. \end{aligned}$$

Lagrange avait déjà établi cela, mais Cauchy va bien plus loin. Il invente une notation en deux lignes pour les substitutions. L'image de toute lettre se lit sur la deuxième ligne au-dessous de cette lettre, notation qu'il abrège encore

en $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, manipule des produits de substitution, définit l'ordre d'une

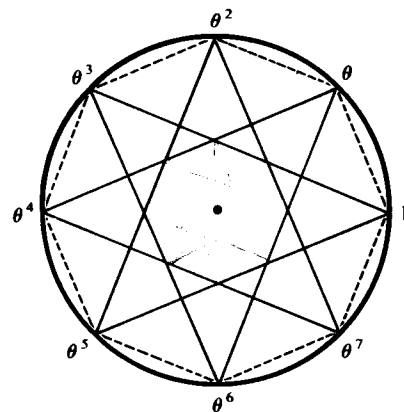
substitution comme étant la plus petite puissance d'une substitution $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ telle

que $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^n$ soit l'identité. Il étudie ce que nous appelons le groupe cyclique engendré par une substitution donnée S d'ordre n , mais Cauchy n'utilise pas encore une seule lettre pour symboliser une substitution, ce que fera Galois. Or deux groupes cycliques de même ordre sont évidemment isomorphes.

Ainsi, Cauchy démontre que si r est un nombre premier avec n , S^r engendre le même groupe cyclique que S , cela par un raisonnement identique à celui de Gauss prouvant dans les *Disquisitiones* que si α_i est racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, alors α_i^r est encore une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité (cf. encadré 3).

Mais même un tel exemple d'« analogie de structure », trivial pour nous, ne sera pas mis en évidence explicitement avant quelques dizaines d'années.

3. Exemple de groupe cyclique d'ordre 8



Les 8 sommets du polygone peuvent figurer les 8 racines 8^{e} de l'unité;

$\theta = e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ engendre ce groupe.

Ils peuvent aussi figurer une substitution S d'ordre 8 ($S^8 = \text{Identité}$) et ses puissances successives.

Si on part de θ^r (par exemple θ^3), Cauchy remarque que calculer ses puissances successives, c'est joindre les sommets du polygone de r en r , et si r est premier à 8, le polygone étoilé obtenu a les mêmes sommets que le polygone convexe initial. Dans ce cas :

θ^r est aussi un générateur du groupe,
 θ^r est dite aussi racine primitive 8^{e} de l'unité.

Ces Mémoires de Cauchy seront lus par Abel et Galois dans les années 1826-1832, mais Cauchy se désintéressera du sujet pendant près de trente ans. Dans les années 1844-1846, quelques mois avant la publication par Liouville des écrits de Galois (cf. ci-dessous), Cauchy y revient et publie un grand *Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données* ainsi que de nombreuses notes aux *Comptes Rendus* de l'Académie. Tous ces travaux sont l'étude systématique d'une structure bien définie, le groupe des

substitutions de n lettres, d'ordre $n!$, aujourd'hui appelé groupe symétrique S_n .

Ici, pour la première fois, l'étude des substitutions sort de l'orbite de la théorie des équations; les groupes de substitutions — Cauchy dit les «*systèmes de substitutions conjuguées*» — sont devenus un objet en soi, et le *Mémoire sur les arrangements* leur est consacré. En cela, il participe incontestablement au mouvement qui revivifie l'algèbre dans la deuxième moitié du XIX^e siècle : l'étude des structures algébriques pour elles-mêmes et la prise de conscience historique du rôle des opérations.

Cauchy y fonde un véritable *calcul des substitutions*, utilisant tous azimuts toutes les ressources de différentes techniques opératoires et procédures qu'il a mises au point (manipulations sur les groupes de lettres sur lesquels sont définies les substitutions en vue de déterminer les conditions générales de commutativité, écriture des substitutions sous la forme de produits de cycles, notation par une seule lettre, etc.).

En fait, ce calcul des substitutions de Cauchy, élaboré sans finalité vraiment définie, aura besoin du choc de la théorie des équations pour témoigner de sa fécondité. C. Jordan utilisera plusieurs procédures de Cauchy pour reconstruire des démonstrations incomplètes de Galois.

Le nouveau formalisme algébrique sur les substitutions que Cauchy a mis à jour, en particulier l'adoption d'une seule lettre pour symboliser une substitution, l'éblouit. Il le compare même à la découverte du symbolisme leibnizien du calcul infinitésimal. La découverte d'autres calculs, comme le calcul des congruences de Gauss ou le calcul barycentrique de Möbius, susciteront le même enthousiasme chez leurs inventeurs. Ils semblent permettre l'étude des nouveaux objets mathématiques, avec une économie d'efforts et d'inspirations.

Sur un exemple précis, Cauchy met en lumière l'idée d'homomorphisme d'un groupe de substitutions G_1 sur un autre G_2 , et vérifie que son noyau est bien un sous-groupe de G_1 . L'exemple est important car il s'ouvre sur l'idée radicalement neuve du *transport* de certaines propriétés d'une structure à une autre par un homomorphisme.

Le cas de Cauchy est intéressant : mathématicien de grande stature, créateur particulièrement fécond en analyse, il est sensible aux tendances encore souterraines qui caractériseront la nouvelle algèbre. Il aspire à des formalismes, des procédures de calcul symbolique pouvant rendre compte de théories diverses. Mais sa pratique est plus restrictive, et cette aspiration ne se nourrit pas encore vraiment d'analogies de structures mises à jour.

La trajectoire fulgurante d'Evariste Galois

Evariste Galois (1811-1832) est sans doute la figure la plus attachante et la plus singulière de toute l'histoire de la communauté mathématique, célèbre autant par la profondeur de ses travaux et de ses idées, qui sont à la source même de l'algèbre moderne, que par sa vie révoltée et passionnée, tragiquement interrompue à vingt ans et sept mois.

A quinze ans, son goût pour les mathématiques se révèle; Galois dévore tous les écrits des maîtres de son époque : Legendre, Lagrange, Gauss,

Cauchy. Il assimile les nouvelles notions et méthodes, en particulier celles de Gauss et de Cauchy, avec une prodigieuse puissance.

A partir de 1829, c'est le temps des épreuves douloureuses : son père se suicide à la suite d'une cabale politique antilibérale et Evariste échoue deux fois à l'École polytechnique pour une question qu'il juge sans intérêt. Il est admis à l'École préparatoire, mais en sera expulsé en 1831 à la suite d'un article violent dans lequel il dénonçait «*l'esprit réactionnaire du directeur de l'École normale*» pendant la révolution de Juillet. Deux fois, les Mémoires qu'il a rédigés pour l'Académie des sciences sont égarés en 1829 et 1830. Le troisième, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* est rejeté comme incompréhensible par Poisson en 1831. Galois y forgeait les premiers concepts de la théorie des groupes pour résoudre les problèmes jusqu'ici insolubles de la théorie des équations.

Galois adhère avec passion à la cause du progrès et de la révolution, autour de François Raspail et d'Auguste Blanqui. Ses amis sont tous des républicains engagés. En 1831, il est arrêté pour avoir porté un toast à Louis-Philippe, un couteau à la main. Acquitté, il est repris deux mois plus tard, à la tête d'un cortège de manifestants. Emprisonné à Sainte-Pélagie, il poursuit ses recherches, travaille beaucoup «*de tête*» sur les intégrales de fonctions algébriques. De là, il écrit une préface cinglante, dans laquelle il fustige les autorités académiques et leur «*morque stupide*» et le fonctionnement des institutions de la science. Il dénonce les artifices rhétoriques des ouvrages didactiques qui donnent l'illusion d'une parfaite ordonnance et dissimulent les difficultés. «*En vain, les analystes voudraient-ils se le dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils composent (...)*»

Dans la préface de Sainte-Pélagie, Galois affirme aussi, avec une intrépidité superbe, la confiance dans son œuvre et dans les nouvelles voies qu'il ouvre à l'analyse : «*Sauter à pieds joints sur ces calculs; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.*» Galois témoigne d'une aversion pour les longs calculs qui masquent les idées essentielles. Ce souci de grouper les problèmes suivant leurs analogies profondes de structure plutôt que leur aspect superficiel, n'est-ce pas le programme de la mathématique moderne, formulé avec un siècle d'avance?

Puis Galois est transféré à la maison de santé Faultrier, où on lui laisse quelque liberté. Il travaille à nouveau avec acharnement et connaît de brèves et décevantes amours. Provoqué en duel à la suite d'une rupture amoureuse, dans des conditions très obscures, il épuise en vain toutes les tentatives de conciliation. Au cours d'une dernière nuit terrible, Galois relit fébrilement tous ses papiers et rédige la fameuse *Lettre à Auguste Chevalier*, qui constitue son testament mathématique et dans laquelle il confie à son ami toute son œuvre (deux Mémoires, des essais, des brouillons), tout un «*gâchis à déchiffrer*», selon ses derniers mots; lettre qui contient aussi la classification des intégrales abéliennes que Riemann devait retrouver vingt-cinq années plus tard.

Ce n'est qu'en 1843, à la suite des efforts soutenus de son ami et de son frère, que Liouville annonce à l'Académie la publication des écrits de Galois,

qui eut lieu finalement en 1846. Mais l'ampleur véritable de la théorie de Galois ne fut dévoilée qu'en 1870 par Camille Jordan dans son *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Encore devait-elle se révéler par phases successives jusqu'en 1930 avec les travaux d'Artin.

Evariste Galois pensait que la vérité de la science ne devait pas se présenter comme un ordre achevé et immuable mais plutôt dans le mouvement de l'invention toujours inachevée, sans cesse rectifiée. Sur un point au moins, cette exigence a été entendue : l'édition critique intégrale de ses écrits (par R. Bourgne et J.-P. Azra) permet le contact exceptionnel avec l'œuvre vécue, vivante, du jeune mathématicien, telle qu'elle a été déchiffrée dans ses manuscrits, non séparée des ébauches, des tâtonnements de la naissance, des hésitations de l'invention, marquée par les circonstances impitoyables de sa vie.

Exemple unique d'œuvre mathématique non divorcée de son auteur qui n'a pas pu et pas voulu s'effacer de ses travaux.

La théorie de Galois

Le problème essentiel traité par Galois est donc celui de la résolubilité des équations par radicaux, non seulement le cas de l'équation générale du 5^e degré traité par Abel (cf. chapitre 3), mais l'objectif est de fournir aussi un critère pour toutes les équations algébriques. Nous allons esquisser les grands traits de sa théorie sans nous en tenir à la forme stricte des mémoires de Galois, mais plutôt telle qu'elle s'est révélée au cours de différentes phases successives, jusqu'au XX^e siècle.

Galois commence par éclaircir la notion de quantité rationnelle par rapport à d'autres quantités. Il la définit en ces termes dans le *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1831) : «... on pourra convenir de regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle d'un certain nombre de quantités déterminées, supposées connues a priori; par exemple, on pourra choisir une certaine racine d'un nombre entier, et regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle de ce radical. Lorsque nous conviendrons de regarder ainsi comme connues de certaines quantités, nous dirons que nous les adjoignons à l'équation qu'il s'agit de résoudre. Nous dirons que ces quantités sont adjointes à l'équation.

« Cela posé, nous appellerons rationnelle toute quantité qui s'exprimera en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et d'un certain nombre de quantités adjointes à l'équation et convenues arbitrairement.

« Quand nous nous servirons d'équations auxiliaires, elles seront rationnelles si leurs coefficients sont rationnels en notre sens ».

Ces notions de quantité rationnelle et d'adjonction déjà entrevues dans le *Mémoire de Vandermonde*, et surtout chez Gauss (cf. la résolution de l'équation $x^{17} - 1 = 0$, fin du chapitre 3), sont cette fois très explicites, et Galois approche le concept de corps engendré par un ensemble de nombres algébriques. Précisons encore sur un exemple, cité par Galois lui-même. L'équation cyclotomique $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$ (avec p nombre premier) est irréductible sur le corps \mathbb{Q} des rationnels. Mais si l'on adjoint à ce corps la racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité ($\theta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$), alors cette équation se

factorise en $(x - \theta)(x - \theta^2) \dots (x - \theta^{p-1}) = 0$, elle est donc réductible sur le corps $\mathbb{Q}(\theta)$.

Ensuite Galois introduit le concept-clé de « groupe de l'équation » : « Soit une équation donnée dont a, b, c sont les m racines... Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c, \dots qui jouira de la propriété suivante :

» 1) que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue;

» 2) réciproquement, que toute fonction des racines déterminable rationnellement soit invariable par ces substitutions. »

Le groupe d'une équation de degré n sur un corps donné, qui est le plus petit corps contenant les coefficients, n'est donc pas le groupe de toutes les permutations entre les n racines — c'est-à-dire le groupe symétrique S_n d'ordre $n!$ — mais un sous-groupe de ce groupe, formé des substitutions qui laissent invariantes toutes les relations entre les racines, donc qui conservent les expressions polynômiales des racines dont la valeur appartient au corps de base.

Par exemple, si on considère l'équation $x^4 - x^2 - 2 = 0$, elle peut se mettre sous la forme $(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$, qui ne peut pas se réduire davantage sur le corps \mathbb{Q} . Elle admet quatre racines

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i.$$

On a les relations $x_1 x_2 = -2$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 x_4 = +1$, $x_3 + x_4 = 0$.

Le groupe de cette équation comprendra quatre substitutions seulement : l'identité, la substitution S , qui échange x_1 et x_2 et laisse fixes x_3 et x_4 ; la substitution T , qui échange x_3 et x_4 et laisse fixes x_1 et x_2 ; et la substitution $U = ST$, qui échange à la fois x_1 et x_2 , d'une part, x_3 et x_4 , d'autre part. Le corps des racines de cette équation est obtenu par adjonction à \mathbb{Q} de $\sqrt{2}$ et de i , il s'écrit $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. On peut d'ailleurs montrer qu'il est aussi obtenu par adjonction à \mathbb{Q} d'une seule quantité, ici c'est

$$i + \sqrt{2} \text{ et } \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2}).$$

(C'est le théorème de l'élément primitif.)

Les éléments de $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i + \sqrt{2})$ s'écrivent $a + b\sqrt{2} + ci + di\sqrt{2}$, où a, b, c, d sont des entiers relatifs.

On sait que les éléments i et $-i$ sont dits des nombres complexes conjugués; ils sont racines de l'équation irréductible sur le corps des réels $x^2 + 1 = 0$. De même $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ seront dits conjugués sur le corps \mathbb{Q} des rationnels, car ils sont racines d'une équation irréductible sur \mathbb{Q} , $x^2 - 2 = 0$. De façon générale, on dit que deux éléments u et v du corps \mathbb{N} des racines sont conjugués sur \mathbb{Q} si, et seulement si, u et v sont tous deux racines du même polynôme irréductible sur \mathbb{Q} .

En termes modernes, l'idée de Galois est de mettre en évidence que les substitutions du groupe de l'équation correspondent à des « automorphismes » du corps \mathbb{N} des racines (c'est-à-dire des bijections de \mathbb{N} dans lui-même qui respectent l'addition, la multiplication et l'unité), qui laissent fixes les éléments du corps des coefficients; ces automorphismes appliquent donc une racine du polynôme sur une de ses conjuguées. Aujourd'hui, on envisage plutôt le groupe de Galois d'une équation sous l'angle de ce groupe des automorphismes de \mathbb{N} laissant fixes les éléments du corps des coefficients.

La théorie de Galois consiste à user conjointement de deux procédés dont l'un est la décomposition du groupe de l'équation en sous-groupes emboîtés et l'autre tient dans les adjonctions successives de grandeurs (déterminées par le premier procédé) et qui étendent le domaine de rationalité de l'équation en suivant un ordre défini par le procédé de réduction du groupe (cf. encadré 4).

Ainsi, elle fait correspondre à chaque corps K intermédiaire entre le corps des coefficients (pour Galois, il s'agissait du corps Q) et le corps N engendré par les racines de l'équation, un sous-groupe du groupe de l'équation (formé des permutations qui laissent invariants les éléments de K) et traduit donc les propriétés des corps intermédiaires en propriétés équivalentes des sous-groupes.

En particulier, Galois montre que dans une résolution par radicaux et dans les réductions successives que subit au cours des calculs le groupe de l'équation, chaque nouveau groupe qui apparaît est ce qu'on appelle aujourd'hui un sous-groupe *distingué* dans le groupe précédent, ce qui, dans la corrélation sous-groupes/sous-corps de la théorie, est équivalent à la propriété pour le sous-corps correspondant d'être engendré par toutes les racines d'une équation auxiliaire.

Rappelons qu'un sous-groupe H d'un groupe G est distingué dans G (on dit aussi normal ou invariant dans G) si, pour tout x de G , on a $xH = Hx$ ou bien $xHx^{-1} = H$. Mais cette définition n'apparaît pas ainsi dans les écrits de Galois et le concept de normalité ne sera parfaitement compris que par Jordan.

La théorie de Galois aboutit à une condition portant sur le groupe de l'équation, nécessaire et suffisante pour que l'équation soit résoluble par radicaux : le groupe doit être « résoluble » (le mot est d'Artin), c'est-à-dire qu'il doit posséder une suite de sous-groupes emboîtés

$$(1) = G_0 \subset G_1 \dots \subset G_n = G$$

tel que chaque sous-groupe G_i soit distingué dans G_{i+1} , et tel que tous les groupes-quotients G_{i+1}/G_i soient commutatifs.

On peut maintenant comprendre pourquoi le théorème d'Abel sur l'irrésolubilité par radicaux de l'équation générale de degré n est une application de la théorie de Galois. L'équation « générale » de degré n , $a_0x^n + \dots + a_n = 0$, a des coefficients littéraux indépendants. Son groupe de Galois est donc le groupe de toutes les permutations des racines, soit le groupe symétrique S_n (puisque'il n'y a aucune relation particulière entre les racines). Or on peut montrer que pour n supérieur à 4, le groupe S_n n'a qu'un

seul sous-groupe distingué, le groupe alterné A_n d'ordre $\frac{n!}{2}$, et ce dernier est « simple », c'est-à-dire qu'il n'a pas d'autres sous-groupes distingués. La condition de la théorie de Galois n'est donc pas vérifiée; S_n n'est pas « résoluble ».

Pour Galois, la résolubilité d'une équation cesse d'être un problème absolu qui appelle d'emblée une réponse définitive. Elle est conçue comme un lien entre un certain être algébrique, l'équation, et son « milieu », le corps ou domaine de rationalité auquel on la rapporte. La résolubilité devient donc

4. Exemple d'application de la théorie de Galois

Soit l'équation $x^4 - 3 = 0$; elle est irréductible sur le corps Q et elle admet les quatre racines distinctes $r, ir, -r, -ir$ avec $i = -1$ et $r = \sqrt[3]{3}$. Le corps des racines (ou corps de décomposition) de l'équation est obtenu par adjonction à Q de deux quantités r et i , soit $N = Q(r, i)$ qu'on peut aussi écrire $Q(r + ir)$. Tout élément de N s'écrit comme combinaison linéaire des 8 éléments suivants : $1, r, r^2, r^3, i, ir, ir^2, ir^3$. (Après l'injection des idées de linéarisation dans la théorie des corps, on considérera N comme un espace vectoriel de dimension 8 sur Q , on dira que N est une extension de degré 8 sur Q .)

Les éléments du groupe de l'équation seront déterminés dès qu'on connaît l'image de i et celle de r ; i ne peut être appliqué que sur l'un de ses conjugués, soit i lui-même, soit $-i$. De même, r ne peut être appliqué que sur l'un de ses quatre conjugués $r, -r, ir, -ir$.

En combinant ces conditions, il y a donc huit éléments dans le groupe de Galois G (huit automorphismes du corps N). Les voici déterminés par leurs effets sur les générateurs i et r :

	I	S	S ²	S ³	T	ST	S ² T	S ³ T
Image de i	i	i	i	i	$-i$	$-i$	$-i$	$-i$
Image de r	r	ir	$-r$	$-ir$	r	ir	$-r$	$-ir$

On peut vérifier que ces automorphismes conservent les relations polynomiales $i^2 = -1, r^4 = 3$.

G contient le sous-groupe $H = \{I, S, S^2, S^3\}$ engendré par S , qui lui-même contient le sous-groupe plus petit $L = \{I, S^2\}$ engendré par S^2 .

Chaque automorphisme du groupe H laisse i fixe; il laisse donc fixe tout élément du sous-corps $Q(i)$.

Le sous-groupe L plus petit est formé des automorphismes qui laissent fixes tous les éléments du sous-corps plus grand $Q(i, r^2)$.

Ainsi, à la chaîne descendante des sous-groupes

$$G \supset H \supset L \supset I$$

correspond la chaîne ascendante des sous-corps

$$Q \subset Q(i) \subset Q(i, r^2) \subset Q(i, r) = N,$$

La chaîne ascendante des sous-corps fournit une méthode de résolution de l'équation donnée, par adjonctions successives des racines d'équations plus simples $x^2 = -1, y^2 = 3, z^2 = \sqrt{3}$.

relative à ce domaine. Au fur et à mesure qu'on changera de domaine de rationalité, les groupes de Galois d'une même équation changeront.

La notion de groupe chez Galois reçoit ainsi un pouvoir d'articulation et une souplesse que jamais Cauchy, par exemple, n'avait songé à lui donner. Pour ce dernier, même dans ses travaux postérieurs de 1844-1846, un « système de substitutions conjuguées » est une entité indécomposable, assez

rigide, dont il explore les propriétés mais sans jamais mettre en évidence les concepts de sous-groupe et de sous-groupe normal.

Cette idée de relativité, invention propre de Galois, va d'ailleurs se répercuter plus tard dans toutes les théories mathématiques et physiques nées de la théorie des groupes. On l'a vu à l'œuvre dans le programme d'Erlangen (cf. chapitre 4).

Ainsi, dès 1832, la pensée de Galois est porteuse de concepts fondamentaux de l'algèbre moderne, qu'elle met en relation suivant des liens très profonds. Mais comme l'ont dit les éditeurs de Galois (Bourgne et Azra) : « *Paradoxe en sa concision, sa pensée n'était pas faite pour qu'on en parte mais pour qu'on la rejoigne.* »

Le renom de Galois a grandi au fur et à mesure que s'accomplissait la transformation de l'algèbre qu'il avait préconisée.

3. L'École algébrique anglaise

L'algèbre symbolique

Ainsi, sur le continent européen, de nombreux mathématiciens (Gauss, Galois, Cauchy, Abel) accumulaient de riches connaissances sur des objets de plus en plus diversifiés, théorie des substitutions, composition des classes de formes quadratiques et préparaient le terrain à l'élargissement du champ de l'algèbre. Mais ces objets n'appartenaient pas à proprement parler au cadre de l'algèbre, qui restait traditionnellement la science des équations algébriques, une sorte d'« *arithmétique universelle* » régie par les mêmes lois que le domaine numérique usuel; ces lois étaient dites celles « *de la généralité de l'algèbre* » sans précision supplémentaire.

A la même époque, un groupe de mathématiciens anglais allait formuler abstraitement la doctrine pour une nouvelle conception de cette science. Les Anglais étaient restés à l'écart du développement général des mathématiques au XVIII^e siècle par suite de la polémique entre Newton et Leibniz. La tradition newtonienne dominante avait abouti à une certaine stagnation scientifique. Au début du XIX^e siècle, avec la diffusion des notations symboliques leibniziennes du calcul infinitésimal, un petit groupe de mathématiciens de Cambridge se mirent à réfléchir sur le rôle et l'importance de la symbolique.

Leur attention s'est d'abord concentrée sur l'analyse et ils s'efforçaient de classer formellement les fonctions, suivant les relations qu'elles vérifiaient. Puis ils se penchent sur les perspectives de l'algèbre. Pour justifier les opérations avec des expressions littérales, Peacock distingue en 1833 l'algèbre arithmétique et l'algèbre symbolique. L'algèbre arithmétique, c'est l'arithmétique littérale ou *logistica speciosa*, courante depuis Viète. Quant à l'algèbre symbolique, c'est une science « *pure* » de symboles qui peuvent représenter des objets tout à fait quelconques, sur lesquels toutes les opérations sont jugées possibles *a priori*. La seule contrainte est que les lois de combinaison de ces symboles coïncident avec celles de l'algèbre arithmétique quand les symboles représentent eux-mêmes des quantités

arithmétiques. Pour Peacock, l'arbitraire qui subsiste quant au choix des relations fondamentales entre les symboles va déterminer des possibilités d'interprétation différentes de ceux-ci.

En résumé, une fois les règles initiales fixées, l'autre but de l'algèbre symbolique est de trouver un modèle convenable dans le cadre duquel les symboles ont un sens et les règles initiales sont valables.

Le principe de permanence

Du fait que certaines propriétés avaient gardé leur validité dans le passage des nombres réels aux nombres complexes (les opérations usuelles, la factorisation, etc.), Peacock croit pouvoir énoncer un principe de permanence. Ce principe, réaffirmé à plusieurs reprises, devait permettre, selon Peacock et ses disciples De Morgan et Gregory, l'édification d'une science formelle de l'algèbre aussi déductive que la géométrie semblait l'être. La construction axiomatique de l'algèbre serait analogue à la construction axiomatique de la géométrie et tous les théorèmes reposeraient sur des principes initiaux, règles et définitions exprimant les relations fondamentales entre les symboles.

Malheureusement, le principe de permanence se révèle être un *diktat* arbitraire qui ne peut servir à de solides fondations de l'algèbre. Par exemple, la décomposition d'un nombre entier en un produit de facteurs premiers, bien qu'exprimée symboliquement, ne peut pas être prise comme une propriété de l'algèbre symbolique. En effet, si cette propriété vraie dans \mathbb{Z} , le reste dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$, (c'est-à-dire quand les symboles sont des entiers de Gauss), elle ne l'est plus dans d'autres anneaux comme $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, ce que plusieurs mathématiciens ne devaient pas tarder à découvrir (cf. ci-dessous). D'autre part, toutes les tentatives de De Morgan d'édifier une « *algèbre triple* » — l'« *algèbre double* » étant le calcul algébrique sur les complexes —, système à trois unités de base dont les lois seraient identiques à celles de l'algèbre usuelle, se heurtaient à un échec; et l'on sait pourquoi (cf. chapitre 7).

D'ailleurs, la découverte des quaternions de Hamilton, puis celle des octaves de Cayley, avec notamment la mise en évidence de lois de composition non commutative, puis non associative, devaient briser définitivement le *diktat* du principe de permanence.

On peut dire que les algébristes anglais insistaient sur un parallélisme entre arithmétique et algèbre si rigide que, s'il avait été maintenu, il n'aurait autorisé que l'étude des domaines numériques dont la structure est en tout point similaire à celle des domaines numériques traditionnels \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ou \mathbb{R} et il aurait amputé la généralité naissante de l'algèbre. Ils ne semblent pas avoir saisi qu'une relation vraie avec une certaine interprétation de symboles peut ne pas l'être avec une autre, mais sans doute l'éventail des relations algébriques auquel ils se référaient était-il trop restreint.

Pourtant, l'approche de l'École de Cambridge a ouvert la voie à une pensée plus abstraite de l'algèbre. Les travaux de Cayley et de Sylvester sur les déterminants et les matrices ainsi que ceux de Hamilton portent la marque de leurs idées et de leurs exigences.

La logique mathématique de Boole

Une autre branche mathématique est aussi issue de ce courant : la logique mathématique. L'algèbre symbolique s'occupait des lois de combinaison des symboles; or, quand on exprime les expressions logiques par des symboles, on peut également étudier les règles de leurs combinaisons qui s'articulent sur les lois générales de la pensée. De Morgan s'était ainsi beaucoup intéressé à la logique des relations. Mais le pas décisif est franchi par George Boole (1815-1864), qui définit, pour la première fois explicitement, un calcul sur des classes (ou ensembles) avec des notations appropriées désignant la réunion, l'intersection... Il observe que le calcul de classes peut aussi être interprété comme un calcul de propositions, mais ne va pas très loin dans cette voie, qui sera poursuivie par Charles S. Peirce (cf. encadré 5).

5. Calcul booléen

x, y, z représentent des classes.

Boole note la classe universelle par 1, et la classe nulle ou vide par 0.

xy est l'intersection de deux classes;

$x + y$ est la réunion de 2 classes;

$1 - x$ est le complémentaire de x ;

$x - y$ la classe des éléments appartenant à la classe x et n'appartenant à y ;

la relation d'inclusion, notée aujourd'hui $x \subset y$ est écrite par Boole $xy = x$.

Les relations suivantes, considérées comme évidentes, sont posées comme axiomes :

$$\begin{aligned}x(1 - x) &= 0; \\xy &= yx; \\xx &= x; \\x + y &= y + x \\x(u + v) &= xu + xv;\end{aligned}$$

la loi du tiers exclu s'écrit :

$$x + (1 - x) = 1.$$

Si x et y sont des propositions,

xy est la proposition conjointe de x et y ;

$x + y$ est la proposition de x ou de y ou des deux;

$x = 1$ veut dire x est vraie;

$x = 0$ veut dire x est fausse;

$1 - x$ est la négation de x .

On peut dire qu'au milieu du XIX^e siècle les mathématiciens anglais ont une conception claire et très ample de la notion de loi de composition. Boole écrit en 1847 : «*La mathématique traite des opérations considérées en elles-mêmes, indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées.*»

Nous allons voir maintenant comment ils l'appliquent à d'autres objets comme les vecteurs ou les matrices.

4. Les structures linéaires

Des déterminants...

Les concepts de déterminant et de matrice sont étroitement liés historiquement, tous deux proviennent de l'étude au cours du XVIII^e siècle des systèmes d'équations linéaires, que nous écrivons aujourd'hui :

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, m,$$

où les x_i sont connus et les y_j inconnus (cf. exemple pour $n = m = 3$ dans l'encadré 6).

Dès 1678, Leibniz les avait abordés, et utilisé une notation à indices dans le cas d'un système de trois équations à deux inconnues. Il éliminait les deux inconnues et obtenait un déterminant dont la nullité était la condition de possibilité de résolution du système. En 1748, Mac Laurin donne les formules de résolution explicites pour $n = m = 2$ et $n = m = 3$.

La méthode de résolution simultanée d'équations linéaires à plusieurs inconnues, sous forme de quotients de deux expressions, qui sont des polynômes multilinéaires par rapport aux coefficients du système, est explicitée par Cramer en 1754. Vandermonde puis Laplace ont l'idée de définir un déterminant d'ordre n par récurrence sur n , en le développant par rapport à une ligne ou à une colonne.

D'autre part, à propos de la composition des formes quadratiques ternaires, Gauss avait adopté, dans les *Recherches arithmétiques*, une notion très intéressante qu'on peut qualifier de « matricielle ». Pour désigner une « substitution » linéaire (nous disons aujourd'hui transformation linéaire) qui remplace x, y, z respectivement par :

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \quad \text{et} \quad z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

Gauss adopte une notation en tableau carré de trois lignes et trois colonnes :

$$\begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \gamma, \\ \alpha' & \beta' & \gamma', \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'',\end{array}$$

qu'il désigne ensuite par une seule lettre : S.

Et Gauss remarque que si l'on fait successivement la substitution S, puis la substitution S_1 , dont le tableau des coefficients est :

$$\begin{array}{ccc}\delta & \varepsilon & \xi, \\ \delta' & \varepsilon' & \xi', \\ \delta'' & \varepsilon'' & \xi'',\end{array}$$

6. Système de Cramer de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= x_1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= x_2; \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Le déterminant principal D du système est :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Il peut aussi se développer suivant les éléments d'une colonne ou d'une ligne; par exemple, suivant les éléments de la première colonne, on obtient :

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Les déterminants (2,2) sont appelés des « mineurs » de D.

Si D est non nul, la solution du système est donnée par :

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{vmatrix}}{D}$$

le résultat est le même que si l'on faisait une substitution dont le tableau

$$\begin{array}{ccc} \text{serait :} & \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'', & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'', & \alpha\xi + \beta\xi' + \gamma\xi'', \\ & \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'', & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'', & \alpha'\xi + \beta'\xi' + \gamma'\xi'', \\ & \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'', & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'', & \alpha''\xi + \beta''\xi' + \gamma''\xi''. \end{array}$$

Il a donc, dans ce cas, la règle de multiplication de deux matrices. Ce passage devait suggérer à Cauchy la règle générale du produit de deux déterminants dans un Mémoire publié en 1815.

Dans ce Mémoire *Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite de transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment*, Cauchy joue le rôle de législateur de la théorie naissante des déterminants (c'est lui qui impose définitivement cette terminologie). Il réorganise la théorie en un corps déductif et rigoureux de résultats à partir de la propriété définissante d'un déterminant : être une fonction multilinéaire alternée particulière de n^2 quantités².

En généralisant l'écriture en tableau carré à double indice venue des

2. Une fonction alternée ne prend que deux valeurs opposées $\pm k$ quand on permute ses variables de façon quelconque.

systèmes d'équations linéaires, Cauchy peut donner une caractérisation systématique des déterminants (relation entre déterminants formés à l'aide des mineurs de divers ordres d'un déterminant donné, formule du produit des déterminants, etc.). L'utilisation des déterminants dans la résolution des systèmes d'équations linéaires apparaît alors seulement comme une de leurs applications possibles.

Au regard du développement de l'algèbre, la création du concept de déterminant aussi bien que la découverte de ses principales propriétés ne signifient pas seulement une acquisition de méthodes techniques pour résoudre certains problèmes classiques. En effet, le déterminant lui-même est un nombre, mais un nombre relié d'une certaine façon à n^2 autres nombres. Et la multiplication des déterminants introduite par Gauss, explicitée de façon générale par Cauchy, ne représente pas simplement le produit de deux nombres, mais la composition particulière de deux systèmes de nombres arrangés en des tableaux carrés qui en détermine un troisième. Ainsi, d'une part le déterminant est un nombre, de l'autre il ne l'est pas; il réclame un statut propre et joue un rôle dans la création des domaines non purement numériques.

... aux matrices

Bien que la théorie des déterminants soit bien fondée vers 1820, et dérive de l'arrangement en tableau carré, il n'y a pas de progrès décisifs du côté de la notion de matrice. En dépit de l'exemple de Gauss, la séparation des deux concepts, matrice et déterminant, n'est pas claire à cette époque. On cherche en vain chez Gauss, Cauchy ou Binet traces de l'énoncé en une formulation générale de la non-commutativité du produit de deux matrices. Sans doute ce phénomène est-il obscurci par le fait que le produit de deux déterminants étant, lui, un produit de deux scalaires est commutatif.

A partir des années 40, les déterminants vont devenir un outil universel en algèbre et en analyse et les Mémoires à leur sujet se multiplient, trop souvent encombrés d'impressionnants calculs. Les plus importants sont ceux de Jacobi, qui les utilise dans la théorie des fonctions de plusieurs variables.

Néanmoins, la familiarisation des mathématiciens avec les tableaux carrés de nombres grandit. Ceux-ci commencent à intervenir à d'autres sujets que la préparation directe des calculs de déterminants. Le domaine le plus important est l'étude générale des formes à m variables et de degré supérieur ou égal à deux; celle-ci n'est plus seulement motivée par les recherches en théorie des nombres mais aussi en géométrie algébrique.

En 1826, Cauchy, partant d'une surface du second degré (une quadrique) dont le centre est pris comme origine des coordonnées,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = K,$$

cherche à en déterminer les axes principaux. Il aboutit à une équation, exprimant qu'un certain déterminant

$$\begin{vmatrix} A-s & F & E \\ F & B-s & D \\ E & D & C-s \end{vmatrix}$$

est nul, qui constitue ce qu'on appelle le polynôme caractéristique de la matrice symétrique de la forme bilinéaire associée à la forme quadratique représentant le premier membre (cf. chapitre 4, page 137). Il démontre en particulier que les racines de ce polynôme, c'est-à-dire les valeurs propres de cette matrice, sont toutes réelles. Puis Cauchy montre que le polynôme caractéristique est indépendant de tout changement d'axes rectangulaires; (en langage matriciel : des transformations semblables ont les mêmes valeurs propres), ce qui devait s'avérer très important ultérieurement dans la classification des transformations projectives.

De façon générale, l'étude des formes, de leur classification, de leurs transformations, de leurs invariants, a été très stimulante pour disjoindre la notion de matrice de celle de déterminant.

Avec Cayley et Sylvester — ces deux mathématiciens anglais ont travaillé en collaboration pendant près de trente ans dans le domaine de l'algèbre, de la géométrie algébrique et aussi de la théorie des invariants avec Hermite —, la séparation des deux notions est absolument acquise. Le terme même de matrice est introduit par Sylvester en 1850 pour désigner un tableau *rectangulaire* de nombres qu'il ne pouvait appeler déterminant. Le Mémoire majeur, présentant abstraitement les matrices comme des entités distinctes, alors même que leur usage s'est largement répandu, est celui de Cayley en 1858, *A Memoir on the Theory of Matrices*.

Influencé par les résultats d'Hamilton sur les quaternions (cf. chapitre 7), Cayley discute les propriétés caractéristiques des opérations sur les matrices, y compris l'associativité de la multiplication, sa distributivité par rapport à l'addition, et étudie les conditions de la commutativité. Il traite également des matrices rectangulaires, des cas dans lesquels peut s'effectuer leur produit introduit comme une composition de transformations. D'ailleurs, Cayley fait remarquer qu'une matrice n'est qu'une notation abrégée pour une « substitution » linéaire, de même que Gauss notait une forme

$$aX^2 + 2bXY + cY^2$$

par le triplet (a, b, c) .

Ainsi, Cayley construit formellement un nouveau système d'éléments qui ne sont pas des nombres au sens usuel — les matrices carrées forment une algèbre, mais non un corps — et qui ont des propriétés très différentes, mais ces systèmes contiennent des nombres et on peut y injecter des problèmes issus du domaine numérique. Cayley aborde dès ce Mémoire la résolution des équations dans le domaine des matrices.

Ici aussi une généralisation des domaines numériques se dessine qui pourra fournir des possibilités diverses de constructions abstraites.

La notion d'espace vectoriel de dimension n

Tandis que la familiarisation des mathématiciens aux déterminants et aux matrices s'accroît, les raisonnements qui subsistent quel que soit le nombre n de variables leur suggèrent assez vite la conception d'un « espace à n dimensions ». Mais il fallait oser développer un langage géométrique, alors

qu'une interprétation sensible dans le plan ou l'espace manquait pour n supérieure à trois.

D'autre part, le désir d'élaborer un véritable *calcul* portant directement sur des quantités géométriques, rêve ancien et assez vague de certains géomètres depuis Leibniz, s'était vu ravivé à la suite de la représentation géométrique des complexes qui fournissait un modèle de calcul pour les vecteurs du plan. La théorie des quaternions suscitait de multiples recherches sur les « calculs » possibles dans les espaces \mathbb{R}^n .

De façon indépendante, Cayley en Angleterre et Grassmann en Allemagne franchissent le pas vers 1843-1845 et parlent d'espace à n dimensions. Le point de vue de Cayley est issu de la géométrie analytique des coordonnées; un vecteur d'un espace à n dimensions est un système de n nombres réels ou complexes (x_1, x_2, \dots, x_n) . L'addition de deux vecteurs et la multiplication par un scalaire sont naturellement étendus à partir de leur définition dans l'espace à trois dimensions. Il ne s'agit, dit Cayley, que d'un langage commode.

Mais dans son espace de dimension n , Cayley ne considère que des vecteurs, qui sont des éléments de dimension un. Pour parvenir pleinement à la notion fondamentale d'espace vectoriel (même de dimension finie), encore faudra-t-il clairement exhiber le concept de sous-espace vectoriel et sa dimension, la notion d'indépendance linéaire d'un système de vecteurs, etc. Les vues plus originales et essentiellement géométriques de Grassmann répondront à ces questions.

Professeur de lycée, autodidacte en marge des milieux de la recherche mathématique, Grassmann a l'idée de développer une *Analyse géométrique* capable de calculer sur des grandeurs orientées de façon intrinsèque, c'est-à-dire indépendante du choix des coordonnées. Son calcul géométrique voulait dépasser le conflit entre la géométrie analytique, qui utilisait seulement les coordonnées et les équations, et la géométrie synthétique, qui prétendait se passer de tout support algébrique. Il expose ses vues en 1844 dans un ouvrage *Die lineale Ausdehnungslehre* (« la Théorie de l'étendue linéaire ») où se mêlent considérations métaphysiques et mathématiques, et fort difficile à suivre.

Voici comment Grassmann résumait son livre dans une lettre à Cauchy du 18 avril 1847 : « J'y ai déposé les principes d'un calcul véritablement géométrique à l'aide duquel on pourrait calculer des points, des lignes, des aires et des angles presque comme des nombres sans avoir besoin de réfugier à des coordonnées ou à d'autres suppositions arbitraires... De plus j'ai trouvé que cette analyse peut être étendue à des choses qui ne sont pas sujettes à l'imagination, et qu'elle forme les fondements d'une science nouvelle, à laquelle j'ai donné le nom d'*Ausdehnungslehre*. »

Le point de départ est l'addition géométrique des segments orientés, une opération qui vient de la mécanique (addition de forces, de vitesses, etc.) et qui est la caractéristique commune d'autres calculs, comme le calcul barycentrique de Möbius élaboré en 1827, ou le calcul des équipollences de Bellavitis (1830).

Mais Grassmann veut introduire des grandeurs orientées de dimension quelconque. Puisque en dimension un la « grandeur » d'un vecteur est sa

longueur, pour la dimension deux on doit avoir une aire orientée. Le type le plus simple d'aire étant le parallélogramme construit sur deux vecteurs a, b , Grassmann définit celui-ci comme le « produit extérieur » des deux vecteurs et l'écrit $[a, b]$. (Aujourd'hui, on définit ainsi le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$.) Grassmann généralise ces bivecteurs au produit extérieur de p vecteurs, représentant un volume orienté à p dimensions. Mais il a beaucoup de difficultés pour additionner de telles quantités car, par exemple, la somme de deux bivecteurs $a \wedge b$ et $c \wedge d$, pour quatre vecteurs indépendants, n'en est pas un.

L'édifice de Grassmann

Une nouvelle édition de l'*Ausdehnungslehre* en 1862 est plus explicite. Cette fois, Grassmann se range au point de vue de Hamilton en partant d'une base (e_j) d'un domaine S^1 qui est en fait un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension n . Ses quantités de base, nous dirions ses « vecteurs », sont des hypernombres à n composantes $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Il va définir le produit extérieur sur les (e_j) et le prolonger par linéarité pour tout hypernombre. Grassmann procède ici différemment de Hamilton. Il ne cherche pas à faire de S^1 un anneau (c'est-à-dire que le produit de deux quantités de S^1 soit une quantité de S^1), mais il adjoint plutôt à S^1 le domaine des quantités de deuxième ordre, obtenues comme produits extérieurs de deux quantités de base de S^1 . Ce domaine, appelé S^2 , est un espace vectoriel de dimension³ C_n^2 , dont les unités sont notées e_{ij} et vérifient :

$$e_{ij} = e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i \quad (\text{pour } i < j) \quad \text{et} \quad e_i \wedge e_i = 0.$$

Puis Grassmann poursuit cette construction. Pour $1 \leq r \leq n$, S^r sera un espace vectoriel de dimension C_n^r formé des quantités de $r^{\text{ième}}$ ordre dont la base sera formée de produits extérieurs $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, qu'on note $e_{i_1 \dots i_r}$ (avec $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$).

Enfin, il identifie $e_{1, 2, \dots, n}$ avec un scalaire, c'est-à-dire S^n avec le corps des scalaires \mathbb{R} . En ajoutant formellement toutes les unités d'ordre arbitraire, Grassmann obtient en substance une base (e_i) de 2^n éléments, où H parcourt l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots, n\}$. (En termes modernes, c'est une algèbre extérieure de rang 2^n sur S^1 .)

A travers la réduction aux unités de base et l'associativité, Grassmann peut définir le produit extérieur de deux quantités de S^p et S^q . Il est nul si $p + q$ est supérieur à n . En fait, Grassmann va montrer que si V et W sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n , engendrés respectivement par p vecteurs a_1, \dots, a_p et q vecteurs b_1, \dots, b_q et si les $(p + q)$ vecteurs a_i et b_j sont linéairement indépendants (c'est-à-dire $V \cap W = 0$), alors le sous-espace vectoriel $V + W$ correspond au $(p + q)$ vecteur $(a_1 \wedge \dots \wedge a_p) \wedge$

3. $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ est le nombre de couples d'éléments choisis parmi n éléments. De même

$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$ est le nombre de r -uples choisis parmi n éléments.

$(b_1 \wedge \dots \wedge b_q)$. Mais lorsque l'intersection de V et W n'est pas réduite à zéro, ce qui est le cas si $p + q$ est supérieur à n , par exemple, Grassmann voudrait obtenir par un calcul un multivecteur correspondant à cette intersection; il tente de construire un produit « régressif » mais n'aboutit pas. Mais il donne la définition de l'indépendance linéaire d'un système de vecteurs, celle de la dimension d'un espace, et démontre la relation fondamentale suivante, pour deux sous-espaces vectoriels d'un même espace :

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

Ensuite, Grassmann introduit le supplément d'une quantité A^r de S^r , comme étant une quantité de S^{n-r} , notons-la $\text{sup } A_r$. Cela lui permet de définir un deuxième produit, dit *produit intérieur* de deux quantités A^r et B^r de S^r . Il pose $A^r/B^r = A^r \wedge \text{sup } B^r$, que Grassmann peut identifier à un scalaire puisque c'est un élément de S^n . Le produit intérieur vérifie $e_i/e_i = 1$ et $e_i/e_j = 0$ pour i différent de j .

Soulignons deux innovations pour la définition de ce produit; il rompt avec l'habitude qui voulait que le produit de deux quantités d'un certain type soit encore de ce type — le produit intérieur n'est plus une loi de composition interne — et il ne permet pas la définition d'un quotient. Mais il va servir à Grassmann pour développer des notions d'orthogonalité et il donne des applications géométriques de sa théorie de l'étendue.

Bien que la construction de son édifice algébrique-géométrique repose sur une conception très abstraite de la notion d'espace vectoriel à n dimensions, les travaux de Grassmann, très touffus, n'eurent pas d'impact immédiat. Au-delà, on peut indiquer trois directions principales de développement : la généralisation du concept géométrique d'espace présente aussi chez Cayley et Riemann, l'élaboration de l'analyse vectorielle, en particulier par Gibbs, très influencé par Grassmann; enfin, il y a dans la pensée de Grassmann une anticipation de parties fondamentales de l'algèbre moderne. Ce qu'on appelle aujourd'hui son « algèbre extérieure » sortira de l'oubli au début du XX^{e} siècle quand H. Poincaré et Elie Cartan, surtout, révéleront son importance en géométrie différentielle.

C'est Peano qui, en 1888, donnera la définition axiomatique des espaces vectoriels sur le corps des réels, ainsi que celle des applications linéaires d'un tel espace dans un autre. Jusqu'en 1930, c'est le point de vue des matrices et des coordonnées qui prédomine, par rapport au point de vue plus intrinsèque des espaces vectoriels.

A la suite des travaux de Hamilton et de Grassmann, et après une rivalité entre « quaternionistes » et partisans des vecteurs, un certain nombre de physico-mathématiciens (Maxwell, Gibbs, Heaviside) mettent au point vers 1880 les outils principaux de ce qu'on appelle le « calcul vectoriel » dans \mathbb{R}^3 : produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte, opérateur différentiel représenté par le vecteur symbolique nabla, etc.

5. L'essor de la théorie des groupes

La définition abstraite de Cayley

Vers 1850, on avait bien mis en évidence deux sortes de lois de composition s'appliquant les unes aux permutations, les autres aux classes d'équivalence, mais nul n'avait songé à les rapprocher. Le premier qui paraisse concevoir que la notion de groupe est indépendante des objets auxquels elle s'applique est Cayley, dans un Mémoire publié en 1854, *On the Theory of Groups as depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$* .

Cayley y définit abstraitement le groupe, dans l'esprit de l'algèbre symbolique de l'École de Cambridge : « *Un ensemble de symboles 1, α , β , ... tous distincts, et tels que le produit de deux d'entre eux (dans n'importe quel ordre), ou le produit de l'un d'entre eux par lui-même appartienne à l'ensemble, est dit un groupe.* » Cayley s'en tient donc strictement à la conception d'un groupe fini; dans ce cas, en effet, il n'est pas nécessaire de postuler l'existence d'un inverse pour chaque élément, puisque si l'on considère toutes les puissances d'un élément il y en a au moins une, x^n , qui vaut 1 et $x^n = 1$ entraîne $x^{-1} = x^{n-1}$.

Cayley envisage pour un nombre entier n fixé, les tables de multiplication possibles pour les groupes d'ordre n . C'est ainsi qu'il énumère les deux groupes d'ordre 6 (cf. encadré 7), les cinq groupes d'ordre 8 (trois commutatifs et deux non commutatifs). Il ne suppose absolument rien sur les symboles et décrit la structure des groupes finis par leurs tables de multiplication et les relations entre générateurs.

Cayley donne avec beaucoup d'initiative des exemples de groupes dans différents domaines, y compris la théorie des matrices (pas encore tout à fait formalisée à cette époque), le corps des quaternions, la composition des formes quadratiques, ainsi que les ensembles des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Son Mémoire est donc important car jusqu'ici le concept de groupe, venu de chez Galois, était réservé à la théorie des substitutions pour laquelle les éléments ou symboles sont des applications (nous disons aujourd'hui des morphismes), et jamais on n'avait considéré les éléments d'un groupe comme des quantités elles-mêmes; sans doute parce que si l'on pensait quantités on pensait à deux lois et à ce qu'on nomme aujourd'hui structure de corps. Isoler une loi de composition n'était pas naturel. Ce Mémoire restera marginal une bonne vingtaine d'années et Cayley lui-même, dans son exposé de la théorie des matrices, ne mentionnera ni le groupe additif ni le groupe multiplicatif des matrices inversibles.

Des groupes finis de Camille Jordan...

Le concept de groupe est resté confiné aux groupes de permutations pendant longtemps; Camille Jordan (1838-1922) en fut le spécialiste indiscuté. On peut dire qu'il se livre à une re-création intellectuelle de l'œuvre

1^{er} cas :

	1	α	β	γ	δ	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	γ	δ	ε	1
β	β	γ	δ	ε	1	α
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	1	α	β	γ
ε	ε	1	α	β	γ	δ

C'est un groupe cyclique de 6 éléments qu'on peut considérer par exemple comme étant le groupe des racines 6^e de l'unité, ou comme le groupe des rotations autour d'un point O laissant invariant l'hexagone régulier de centre O. Un générateur de ce groupe est la rotation d'angle 60° autour de O.

2^e cas

	1	α	β	γ	δ	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	1	ε	γ	δ
β	β	1	α	δ	ε	γ
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	γ	β	1	α
ε	ε	γ	δ	α	β	1

Ici, les générateurs vérifient $\alpha^3 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $\gamma\alpha = \alpha^2\gamma$.
 Les éléments du groupe sont 1, α , α^2 , γ , $\alpha\gamma$, $\alpha^2\gamma$.
 C'est le groupe S_3 des permutations de 3 éléments.

d'Evariste Galois, complète ses démonstrations, exploite et développe toutes ses indications. Son *Traité des substitutions et des équations algébriques* n'a jamais, jusqu'à nos jours, été dépassé sur plusieurs points. Ce faisant, Jordan quitte le cadre strict des groupes de permutations pour se placer dans celui plus abstrait des groupes finis. En 1868, il classe tous les groupes de déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions. Puis il s'attaque à

l'étude des représentations linéaires d'un groupe qui opère sur un espace vectoriel, c'est-à-dire à la recherche des homomorphismes entre ce groupe et un groupe de transformations linéaires inversibles de l'espace vectoriel dans lui-même (évidemment identique à un groupe de matrices carrées $n \times n$ inversibles à coefficients réels ou complexes et qu'on note $GL(n, \mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{C})$). Jordan étudie systématiquement les groupes classiques et leurs sous-groupes finis, puis il tente de déterminer tous les groupes résolubles finis en réponse au problème de rechercher toutes les équations de degré donné résolubles par radicaux.

D'une part, il introduit des concepts fondamentaux de la théorie des groupes (groupe quotient, notion d'homomorphisme, importance de la suite des sous-groupes distingués d'un groupe, ce qu'on appelle aujourd'hui la suite de Jordan-Hölder d'un groupe, etc.), d'autre part son étude du groupe linéaire le conduit à des résultats très importants sur la réduction des matrices (les formes dites de Jordan).

... aux groupes infinis

Pourtant, même avec Jordan, on en n'est pas encore à la notion générale de groupe telle que nous l'entendons aujourd'hui. Bien que l'idée de *transformation* appliquée à tout l'espace, et pas seulement aux figures de l'espace, soit devenue familière aux géomètres après l'essor de la géométrie projective de Poncelet (cf. chapitre 4), le lien entre cette idée et celle de « permutation » d'un ensemble fini n'est pas établi.

En 1870, Sophus Lie (1842-1899) et Félix Klein font ensemble un séjour à Paris et découvrent les travaux de Jordan et de Galois et commencent à réfléchir sur les groupes de transformation. Pour la première fois sont rapprochés dans une même conception un ensemble fini et un « espace » tel que celui de la géométrie euclidienne. Ce rapprochement aboutit en 1872 à la synthèse magistrale de F. Klein, le *Programme d'Erlangen*, qui place le concept de groupe au centre de l'étude des géométries (cf. chapitre 4). L'impulsion à l'étude des groupes infinis est donnée; Sophus Lie en sera l'un des principaux artisans.

Il est étonnant de constater que de nombreux mathématiciens, dont le plus « moderne » est sans doute R. Dedekind, n'ont cessé de manipuler des groupes de toute espèce sans le formuler de façon explicite. L'emploi flou du terme de « groupe » présent dans le langage courant a coexisté longtemps avec le concept mathématique précis. En particulier, pour les situations mathématiques banales, personne n'a senti la nécessité d'écrire avant 1890 que les entiers relatifs forment un groupe additif, ou que les rationnels non nuls forment un groupe multiplicatif, ces deux groupes étant infinis.

Ce n'est qu'en 1898, avec la parution de son *Traité d'algèbre*, que Weber en donne enfin une définition très générale, de caractère axiomatique, valable sans aucune restriction pour les groupes finis et infinis.

6. L'École allemande et les origines de l'algèbre commutative

Les origines de ce qu'on appelle aujourd'hui l'algèbre commutative, qui comprend en particulier la théorie des anneaux, des idéaux, des corps, sont multiples. Trois branches mathématiques principalement y ont participé : la théorie des nombres, la géométrie algébrique et la théorie des fonctions algébriques. Dans les limites de ce chapitre et des problèmes d'accessibilité de ces objets, nous allons essayer d'esquisser les débuts de la première d'entre elles, ses objets ayant déjà été introduits à propos des *Recherches arithmétiques* de Gauss.

L'œuvre de Gauss fut une source très riche d'idées nouvelles et un modèle privilégié pour les théories arithmétiques du XIX^e siècle, développées par une école d'arithméticiens et d'algébristes allemands. Après sa mort, un certain nombre des recherches que Gauss se proposait de publier comme huitième section des *Disquisitiones* furent éditées.

Gauss y considérait les congruences par rapport à deux modules à la fois : un nombre premier p et un polynôme $\varnothing(x)$ irréductible. Ainsi, il manipulait des classes de polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, deux tels polynômes étant équivalents si leur différence est un multiple de $\varnothing(x)$. Ces travaux devaient avoir la plus grande influence sur les mathématiciens Kummer, Dedekind ou Kronecker.

Depuis longtemps, des analogies avaient été constatées dans le maniement des nombres entiers relatifs et des polynômes (la notion d'anneau devait justement formaliser abstraitement ces analogies), mais on avait toujours regardé l'anneau \mathbb{Z} des entiers relatifs comme l'être fondamental de l'arithmétique, alors que l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ des polynômes à coefficients rationnels était l'être fondamental de l'algèbre.

Les recherches de Gauss prouvaient que cette distinction est superficielle. En effet, on peut se poser la question : à quelle branche des mathématiques appartiendra l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$, ses anneaux-quotients dont les éléments sont les congruences suivant un module double? De quel domaine va relever l'étude de l'arithmétique de cet anneau? Ici, les frontières se brouillent, et la fusion de disciplines qui s'interpénètrent et s'enrichissent mutuellement est caractéristique de la nouvelle mathématique en gestation.

Les nombres idéaux de Kummer

On a vu également Gauss étudier les « entiers complexes » et l'arithmétique de leur anneau $\mathbb{Z}[i]$ très similaire à celle de \mathbb{Z} . Cette étude devait frayer la voie à un très vaste sujet, la théorie des nombres algébriques et celle des entiers algébriques, qui s'est développée avec les tentatives de démontrer le théorème de Fermat (c'est-à-dire l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour n supérieur à deux).

Kummer considère l'expression $x^p + y^p$ (avec p premier), qu'il factorise sous la forme $(x + y)(x + \alpha y) \dots (x + \alpha^{p-1}y)$, où α est une racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité.

$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ vérifie la relation $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{p-2} + \alpha^{p-1} = 0$.

Kummer introduit alors les nombres $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{p-2}\alpha^{p-2}$, où les a_i sont des entiers relatifs quelconques. Il les appelle des « entiers complexes » à la suite de la terminologie choisie par Gauss. Pour un α fixé, la somme, la différence, le produit de deux tels nombres en est encore un, et ils forment donc un anneau qu'on appelle aujourd'hui l'anneau cyclotomique $\mathbb{Z}[\alpha]$. En 1843, il donne des définitions appropriées des notions d'unité, d'entier premier, de diviseur dans cet anneau (analogues à celles que Gauss avait introduites pour les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ et que nous avons rappelées plus haut). Kummer suppose aussi que la décomposition de tout élément de $\mathbb{Z}[\alpha]$ en produit de facteurs premiers de cet anneau est unique, comme c'était le cas dans $\mathbb{Z}[i]$. Cette hypothèse devait lui permettre de démontrer le théorème de Fermat pour tout entier n .

Ce sujet devient brusquement le centre d'attention des mathématiciens en France et en Allemagne. Il est débattu à l'Académie des sciences de Paris. Plusieurs mathématiciens (Dirichlet, Cauchy, Kummer lui-même) découvrent que l'unicité de la décomposition en facteurs premiers non seulement n'est pas évidente mais encore qu'elle est erronée dans certains anneaux cyclotomiques, suivant les valeurs de p . L'analogie entre \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}[i]$ était donc fortuite. C'est pour récupérer, d'une certaine façon, l'unicité de la factorisation en éléments « premiers » que Kummer crée sa théorie des nombres idéaux dans l'année 1844.

Détaillons le cas de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ identique en son principe à un anneau cyclotomique, mais plus simple à exposer. Ses éléments s'écrivent $a + b\sqrt{-5}$ avec a et b entiers relatifs. On a dans cet anneau l'égalité :

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

et on peut vérifier que les quatre facteurs $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ sont bien des éléments « premiers » de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Le nombre 6 admet donc deux décompositions distinctes en facteurs premiers dans cet anneau.

La démarche de Kummer est alors d'introduire dans ce domaine les « nombres idéaux » :

$$\alpha = \sqrt{2} \quad \beta_1 = \frac{1 + \sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \quad \beta_2 = \frac{1 - \sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

alors $6 = \alpha^2\beta_1\beta_2$ s'exprime comme le produit de quatre facteurs, tous « nombres idéaux » de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Si l'on inclut dans la factorisation les nombres idéaux en sus des autres nombres premiers, la factorisation redevient unique. Ainsi, dans certains anneaux, la notion de nombre premier perd son sens et certains nombres qui ne sont pas décomposables en produit de deux facteurs différents de l'unité, et qu'il aurait été naturel de considérer comme premiers, se comportent en fait comme des nombres composés; et le produit de deux tels nombres peut être divisible par un troisième distinct des deux nombres initiaux (on les appelle aujourd'hui des nombres extrémaux).

La démarche et la terminologie choisies par Kummer font irrésistible-

ment penser à la création au XVI^e siècle d'autres êtres *fictifs*, les nombres imaginaires, destinés à préserver certains calculs ou propriétés, quitte à effectuer un détour dans un domaine pas très clairement défini.

Avec sa théorie des « facteurs idéaux », Kummer réussissait rapidement à démontrer le grand théorème de Fermat pour les nombres premiers inférieurs à 100. Mais sa définition des nombres idéaux n'était pas assez générale. Subsistant aujourd'hui sous le nom de « diviseurs », les nombres idéaux de Kummer ont été supplantés par une théorie beaucoup plus puissante de Dedekind, qui s'en est inspiré.

La théorie des nombres algébriques de Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) aborda le problème de la factorisation unique de manière assez différente de celle de Kummer. Nous allons exposer ses principales idées et définitions car elles ont prévalu et créé la théorie moderne des nombres algébriques.

Dedekind généralise la notion d'« entier complexe » de Gauss et de Kummer de la façon suivante : ... un nombre r qui est racine d'une équation irréductible de la forme :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

où les a_i sont des entiers relatifs, est appelé un *nombre algébrique* de degré n . Si le coefficient a_0 est égal à 1, les nombres algébriques sont des *entiers algébriques* de degré n . Par exemple, une racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité est un entier algébrique de degré $p - 1$, puisqu'une telle racine vérifie l'équation :

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0.$$

D'autre part, le nombre $\frac{1}{2} + \sqrt{-5}$, racine de l'équation $4x^2 - 4x + 21 = 0$, est un nombre algébrique de degré deux, mais n'est pas un entier algébrique. Notons évidemment qu'un nombre algébrique ou un entier algébrique peuvent être réels (par exemple $\sqrt{2}$).

Dedekind définit alors pour tout nombre algébrique θ de degré n , l'ensemble $Q(\theta)$ des nombres $a_0\theta^{n-1} + a_1\theta^{n-2} + \dots + a_{n-1}$, où les a_i sont rationnels. On peut montrer assez facilement qu'ils forment un corps, qu'on dit être obtenu par adjonction à Q de θ , cela est un *corps de nombres*. Par exemple, un corps cyclotomique est obtenu par adjonction à Q d'une racine primitive de l'unité, un corps quadratique est obtenu par adjonction à Q d'une racine non rationnelle d'un polynôme du second degré.

Ainsi, on retrouve la notion de corps obtenu par adjonction à Q d'un élément, déjà vue dans la théorie de Galois. La forme explicite que Dedekind utilise pour les éléments de $Q(\theta)$, à savoir une *combinaison linéaire* de $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ à coefficients dans Q , va introduire l'idée qu'on peut considérer un corps de nombres (extension algébrique d'un corps Q), comme un *espace vectoriel* sur ce corps. (Par exemple, un corps quadratique sera un espace vectoriel de dimension 2 sur Q .) Ensuite, Dedekind étudie le sous-ensemble de $Q(\theta)$ formé par les entiers algébriques, dont il peut, ici aussi, établir qu'ils forment un anneau.

Dedekind montre que dans un corps $Q(\theta)$ de nombres algébriques, il existe des entiers $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ tels que tout autre entier algébrique s'écrive comme combinaison linéaire des θ_i à coefficients dans \mathbb{Z} . On dit alors que l'anneau des entiers algébriques est un \mathbb{Z} -module de dimension n .

Ici aussi, cette notion de module obtenue en substituant les anneaux aux corps dans la notion d'espace vectoriel (dans la combinaison linéaire, les coefficients sont entiers au lieu d'être rationnels), est importante par l'injection de l'idée de *linéarisation* qu'elle réalise dans un domaine qui, jusque-là, paraissait relever d'autres méthodes. L'algèbre linéaire va prendre une importance croissante dans la théorie des anneaux et des corps.

L'interprétation ensembliste. La notion d'idéal

Ayant généralisé la notion de nombre algébrique, Dedekind veut lui aussi récupérer l'unicité de la factorisation dans les corps de nombres algébriques. A la place des nombres idéaux de Kummer, R. Dedekind introduit des classes de nombres algébriques qu'il appelle des *idéaux* en hommage à son inspirateur. Un idéal d'un anneau est un sous-groupe additif de l'anneau, tel que le produit d'un élément quelconque de l'anneau par un élément de l'idéal appartient à l'idéal. Il définit une loi de composition sur les idéaux qui est un produit d'idéaux. Si I et J sont deux idéaux, leur produit IJ est l'ensemble des sommes finies, à un nombre quelconque de termes $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ky_k$, où les x_i sont dans I et les y_j dans J . (En général, un idéal n'est pas inversible pour cette loi de composition; si on la «symétrise», on introduit les idéaux fractionnaires, et Dedekind démontre que ceux-ci forment un groupe pour cette loi de composition.)

Il définit la notion d'idéal premier comme étant un idéal qui n'est contenu dans aucun autre⁴. Le théorème principal de Dedekind s'énonce alors : «*Tout idéal (distinct de l'anneau tout entier) peut être représenté de façon unique comme un produit d'idéaux premiers.*»

On comprend maintenant que la théorie des idéaux de Dedekind est une généralisation des entiers ordinaires, constituée à l'origine pour fournir les concepts et les propriétés permettant d'élucider complètement le problème de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans les anneaux d'entiers algébriques.

En 1871, R. Dedekind publie une nouvelle édition de l'ouvrage de Dirichlet, (*Vorlesungen über Zahlentheorie*), auquel il ajoute un célèbre *Supplément* qui constitue un événement déterminant dans l'histoire de l'algèbre. Dedekind y introduit explicitement les notions fondamentales de corps, d'anneau, de module, d'idéal. Elles sont toutes définies à l'aide d'un système d'axiomes, ce qui est sans doute l'une des premières applications de la méthode axiomatique en algèbre. L'interprétation ensembliste se dégage nettement : l'idéal est assimilé à un ensemble de nombres de l'anneau vérifiant des propriétés explicites, la loi de composition opère sur ces

4. Aujourd'hui un tel idéal est dit maximal et on réserve le terme d'idéal premier à un idéal P tel que si xy appartient à P , alors soit x , soit y appartient à P . Mais dans les anneaux considérés par Dedekind, il y a identité entre les idéaux premiers et maximaux.

ensembles mêmes; à la notion «divisible par» est substituée la notion ensembliste «contenu dans», etc.

L'élargissement de la théorie des corps par Kronecker

Richard Dedekind s'était intéressé principalement aux corps des nombres obtenus par adjonction d'un nombre algébrique au corps des rationnels. A la même époque, Kronecker (1823-1891), élève favori de Kummer et son successeur à l'université de Berlin, créait une autre théorie des corps, celle des domaines de rationalité, qu'il publia en 1882.

Ayant assimilé le concept d'adjonction à l'œuvre dans la théorie de Dedekind et qu'il avait également décelé dans les travaux de Galois, et connaissant d'autre part la distinction faite par Liouville, Cantor et d'autres entre nombre algébrique et nombre transcendant, Kronecker introduit la notion d'une *indéterminée abstraite adjointe* à un corps.

Kronecker considère cette fois le cas où l'indéterminée α est un nombre transcendant sur Q , c'est-à-dire ne vérifiant aucune équation algébrique à coefficients dans Q .

Les expressions polynomiales en α , $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots$, sont alors en correspondance biunivoque avec les polynômes en une variable à coefficients dans le corps. Il suffit d'y substituer x à α . Cette correspondance biunivoque est un isomorphisme des anneaux $Q[\alpha]$ et $Q[x]$.

Si l'on veut considérer maintenant le plus petit corps contenant Q et α , soit $Q(\alpha)$, il faut symétriser la loi du produit afin que les polynômes $P(\alpha)$ aient des inverses, donc il faut considérer les fractions rationnelles $\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$, et

Kronecker prouve que $Q(\alpha)$ est isomorphe au corps des fractions rationnelles en une variable à coefficients dans Q . $Q(\alpha)$ et $Q(x)$ sont «identifiés» par la même substitution de α à x .

Puis, en 1887, Kronecker revient au cas où l'indéterminée adjointe est un nombre algébrique θ , racine d'un polynôme irréductible $P(x)$. Reprenant une idée de Cauchy, qui avait identifié les complexes $C = R(i)$ aux classes de polynômes à coefficients réels pour la relation de congruence modulo le polynôme $x^2 + 1$ (cf. chapitre 7), Kronecker montre que dans ce cas $Q(\theta)$ a les mêmes propriétés algébriques que l'ensemble des classes d'équivalence de polynômes à coefficients rationnels pour la relation de congruence modulo $P(x)$. L'ensemble des multiples de $P(x)$ forme ce qu'on a appelé un «idéal» de polynômes, engendré par $P(x)$, noté $(P(x))$. Deux polynômes sont équivalents pour la relation de congruence modulo $P(x)$ si leur différence est un multiple de $P(x)$, c'est-à-dire si elle appartient à l'idéal $(P(x))$.

Considérer les classes d'équivalence modulo $P(x)$, c'est prendre le «quotient» de l'anneau $Q[x]$ par l'idéal $(P(x))$. Si $P(x)$ est irréductible, l'anneau-quotient $Q[x]/(P(x))$ est un corps.

En termes modernes, Kronecker a donc prouvé l'isomorphisme entre ce corps $Q[x]/(P(x))$ et $Q(\theta)$, le corps de nombres algébriques.

Après ces travaux de l'école allemande, ces «méthodes» de l'algèbre moderne (homomorphismes de structures, passages au quotient, etc.) deviendront de plus en plus courantes.

La théorie de Kronecker va donc englober dans un même formalisme les corps de nombres de Dedekind et les corps de fractions rationnelles, et on pourra ensuite adjoindre un nombre quelconque d'indéterminées. Il ne restait plus qu'à faire rentrer dans la théorie des corps les extensions des corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour que la théorie soit tout à fait générale : extensions algébriques de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dont les éléments sont les fameux imaginaires de Galois, et extensions transcendantes selon la construction de Kronecker. Ce pas fut franchi par Dedekind et Weber à la fin du siècle, dans un exposé très général.

En 1910, après les travaux de Hilbert, Steinitz fait une vaste synthèse de tous les concepts algébriques apparus au cours du siècle précédent; elle sera suivie de l'ouvrage didactique de Van der Waerden (*Modern algebra*), qui marque le début de l'algèbre moderne proprement dite.

7. Le nouveau visage de la Mathématique

Ainsi, en moins d'un siècle, l'algèbre a changé complètement de visage : à la fin du XVIII^e siècle, discipline assez étroite, son objet quasiment exclusif était la théorie des équations et son champ le domaine numérique usuel. Avec la grande diversification de ses objets, dont nous n'avons pu donner qu'un très faible aperçu, la nature même de ces objets perd un peu de son intérêt. On a vu, par exemple, que le fait que les éléments d'un groupe cyclique soient des rotations, des substitutions ou des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est de peu d'importance au regard de l'étude de ce groupe. On développe les formalismes mis à jour, abstraction faite des objets auxquels ils s'appliquent. Les *relations* deviennent le sujet privilégié des algébristes.

Les relations, ce sont les différentes opérations ou lois de composition que l'on peut faire agir sur ces objets, la façon dont ces lois de composition se combinent entre elles et définissent des structures algébriques, enfin les relations entre les structures elles-mêmes, les « morphismes » que l'on peut définir de l'une à l'autre.

Ainsi, avec la découverte des structures algébriques, les principales notions mathématiques apparues de façon dispersée se rassemblent, se prêtent mutuellement assistance et s'articulent en de vastes édifices conceptuels.

Quant aux anciens objets des mathématiciens, les nombres entiers, rationnels, réels... ils n'ont pas été en général à la source de la découverte de ces structures algébriques parce qu'elles s'y trouvaient trop familièrement mêlées, ainsi qu'avec d'autres structures que nous n'avons pas étudiées ici, comme celles liées à la notion d'ordre, ou les structures topologiques, qui formalisent abstraitement les notions intuitives de voisinage, de limite et de continuité, structures qui seront axiomatisées au début du XX^e siècle.

Quand le processus d'abstraction les atteint, il les décortique alors et les met à plat pour isoler leurs différentes structures sous-jacentes et les étudier séparément. L'exemple le plus frappant est celui de Cantor considérant l'ensemble des nombres réels « tout nu », réduit au nombre de ses éléments, après l'avoir dépouillé de sa structure algébrique et de sa structure topologique (le « continu » de la droite réelle).

La transformation de l'algèbre amorce celle de toutes les mathématiques. L'étude des structures fondamentales (Bourbaki dit les « structures mères »), de leurs sous-structures (par exemple dans les groupes, les groupes finis, les groupes commutatifs, etc.), l'étude de leurs principales combinaisons (comme les structures algébro-topologiques, dans lesquelles les lois de combinaisons algébriques ont des propriétés supplémentaires de continuité, de différentiabilité, etc.) vont bouleverser l'architecture de l'édifice mathématique dont les anciens clivages (algèbre, arithmétique, géométrie, analyse) deviennent caducs. La fusion des disciplines que nous avons indiquée ponctuellement est aujourd'hui très profonde et globale.

Pourtant, nous avons vu au cours de cet ouvrage les mathématiques *fonctionner*, et très fructueusement, antérieurement à la découverte des structures.

L'étude de ces grandes « machines théoriques », puissants outils de synthèse et de mise en ordre dans le développement tentaculaire et foisonnant des mathématiques, ne saurait remplacer l'exploration intuitive, voire brouillonne, d'objets précis, qui seule suggère les analogies et permet l'initiative et l'indépendance d'esprit.

Ouvrages originaux d'accès aisé

- Argand J.-R., *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par les constructions géométriques*, Paris, 1806, 1^{re} éd., 2^e éd., suivie d'un appendice contenant des extraits des Annales de Gergonne, Paris, 1877.
- Barré de Saint-Venant, *Mémoire sur les sommes et les différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la Mécanique*, C.R. Académie, 1844, t. XXI, p. 621-625. (Un des premiers exposés en France des principes du calcul vectoriel.)
- Cauchy A. L., *Mémoire sur la théorie des Équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires*, O. C. 2^e s., t. XIV, p. 93-120.
- *Mémoires sur les quantités géométriques*, O. C. 2^e s., t. XIV, p. 175-202.
- Cayley A., *On the Theory of Groups, as depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$* , Collected Mathematical Papers, University Press Cambridge, 1889-98, t. II, n^{os} 125-126 et t. IV, n^o 243.
- *A memoir on the theory of matrices*, idem, t. II, p. 475-496.
- Galois E., *Écrits et Mémoires mathématiques*, éd. Bourgne et J.P. Azra, Paris, Gauthier-Villars, 1962.
- Gauss C. F., *Les Recherches arithmétiques*, trad. par A. C. M. Poulet-Delisle, Paris, éd. Blanchard, 1953.

Quelques références qui nous ont particulièrement guidées

- Bachelard S., *La Représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIX^e s.*, Conf. palais de la Découverte ND 113, 1967.
- Bachmakova I., *Sur l'histoire de l'algèbre commutative*, revue de synthèse, 3^e s., n^{os} 49-52, Paris, 1968.
- Crowe M. J., *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre Dame, Londres, 1967.

- Dahan A., *Les Recherches algébriques de Cauchy*, thèse, Paris, 1979.
- *Les Travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept de groupe*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 23, n° 4, 1980.
- Dieudonné J., « La genèse de la théorie des groupes », *La Recherche*, septembre 1979.
- Itard J., *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, Brochure de la bibliothèque d'Information sur l'enseignement mathématique.
- *La Théorie des nombres et les origines de l'algèbre moderne*, XII^e congrès international d'histoire des sciences, Paris, 1968.
- Kiernan B. M., *The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 8, nos 1-2, 1971.
- Novy L., *Origins of Modern Algebra*, Prague, 1973.
- Vignand-D., *Les Démonstrations algébriques du théorème fondamental de l'algèbre*, Paris, D.E.A., 1979.
- Vuillemin J., *La Philosophie de l'algèbre*, Paris, PUF, 1962.

Annexes

Glossaire

On dit qu'on a défini sur un ensemble E une **structure algébrique** si l'on a défini une **loi de composition** qui, à deux éléments quelconques x, y de E , en fait correspondre un troisième noté $f(x, y)$.

Si cette loi est associative, possède un élément neutre e de E tel que $f(e, x) = f(x, e) = x$ pour tout x de E , et si tout élément x de E a un symétrique noté $s(x)$, tel que $f(x, s(x)) = f(s(x), x) = e$, on dit que E muni de cette loi est un **groupe**.

L'**ordre** d'un groupe est le nombre de ses éléments;

un groupe est **abélien** s'il est commutatif;

un **sous-groupe** H d'un groupe G est un groupe H inclus dans le groupe G ;

un groupe **cyclique** est engendré par un seul élément.

Un **anneau** est un ensemble muni de deux lois de composition internes. La loi $+$ (addition) est une loi de groupe abélien et la loi \cdot (multiplication) est associative et distributive par rapport à l'addition.

Un **corps** K est un anneau tel que de plus $K^* = K - \{0\}$ soit un groupe multiplicatif.

Un corps K est dit une **extension** du corps K' si K' est un corps contenu dans K (synonyme de *surcorps*).

Un corps N est un **corps de décomposition** d'un polynôme $f \in K[x]$, si c'est le plus petit surcorps de K contenant toutes les racines de f (synonyme de *corps des racines*).

Un **espace vectoriel** E sur un corps commutatif K est un groupe additif, muni d'une application (loi de multiplication externe) de $K \times E$ dans E , telle que, pour tout couple (α, β) d'éléments de K , et pour tout couple (x, y) d'éléments de E , l'on ait :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x, \\ \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y, \\ \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x, \\ 1 \cdot x &= x.\end{aligned}$$

Un **sous-espace vectoriel** F d'un K -espace vectoriel E est une partie de F de E stable pour les lois de E , et qui est donc elle-même un espace vectoriel inclus dans E .

Notations usuelles

Un **module** M (sur un anneau A commutatif unitaire) est obtenu par la substitution de l'anneau A au corps K dans la définition ci-dessus d'un espace vectoriel.

Une **algèbre** E sur un corps commutatif K est un K -espace vectoriel E qui possède de plus une loi interne multiplicative, distributive par rapport à l'addition. Si cette loi est associative, on dit que l'algèbre E est associative; E possède alors une structure d'espace vectoriel et une structure d'anneau.

Homomorphisme f relatif à deux lois de composition interne

Soit T (resp. \perp) une loi de composition interne sur un ensemble E (resp. E')
 f est un homomorphisme de (E, T) dans (E', \perp)
si pour tout couple (x, y) d'éléments de E , on a :

$$f(xTy) = f(x)\perp f(y).$$

Homomorphisme relatif à deux lois de composition externe

Soit $*$ (resp. \cdot) une loi de composition externe sur un ensemble E (resp. E'), dont le domaine d'opérateurs est commun Ω . f est un homomorphisme de $(E, *)$ dans (E', \cdot) si pour tout couple (α, x) appartenant à $\Omega \times E$, on a :
 $f(\alpha * x) = \alpha \cdot f(x)$.

Homomorphismes de groupes, d'anneaux, de corps, d'espaces vectoriels, de modules, etc. Homomorphisme pour chacune des lois internes ou externes définissant ces structures (on dit aussi morphisme).

Isomorphisme : cas où l'homomorphisme est bijectif.

Z anneau des entiers relatifs.

Q corps des nombres rationnels.

R corps des nombres réels.

C corps des nombres complexes.

K[x] anneau des polynômes à coefficients dans le corps K .

K(x) corps des fractions rationnelles à coefficients dans le corps K .

Quelques ouvrages généraux de référence

- Abbrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900*, sous la direction de J. Dieudonné, Paris, 1978.
- Bourbaki N., *Éléments d'histoire des Mathématiques*, Paris, Hermann, 1969.
- Brunschvicg L., *Les Étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Alian, 1912 ou Paris, rééd. Blanchard, 1972.
- Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*.
- Cavaillès J., *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962.
- Desanti J.-T., *La Philosophie silencieuse*, Paris, Éd. du Seuil, 1975.
- Dictionary of Scientific Biography*, Charles C. Gillispie éd., New York, Charles Scribner's Sons, 1970-80.
- Dictionnaire des Mathématiques*, A. Bouvier et M. George (sous la direction de F. Le Lionnais), Paris, PUF, 1979.
- Encyclopaedia Universalis*.
- Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, éd. française révisée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de J. Molk.
- Groupe inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, *La Rigueur et le Calcul*, Paris, CEDIC, 1982.
- Histoire générale des Sciences*, publ. sous la direction de René Taton, Paris, PUF, 1958.
- Itard J., *Essais d'histoire des mathématiques*, réunis et introduits par R. Rashed, Paris, A. Blanchard, 1984.
- Itard J., Dedron P., *Mathématique et Mathématiciens*, Paris, Magnard, 1960.
- Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford Un. Press, 1972.
- Lakatos I., *Preuves et Réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, Paris, Hermann, 1984.
- Lionnais F. Le., *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, Paris, rééd. Blanchard, 1962.
- Montucla J.-F., *Histoire des mathématiques*, 2^e éd., 4 volumes, 1799-1802, réédition, Blanchard, 1960.

Index terminologique

- Abaque, 19.
- Absolu (de Cayley), 160, 161.
- Adjonction, 114, 275, 293.
- Affine (transformation), 146, 147, 165.
- Algèbre extérieure, 286.
- Algèbre géométrique*, 76, 85.
- Algèbre syncope*, 78.
- Algébriques (entiers, nombres), 269, 291-293, 295.
- Amicaux (nombres), 48.
- Analyse algébrique, 200, 218-219, 225.
- Analytique (fonction), 235-236.
- Anneau, 266.
- Application des aires, 60-63, 65.
- Arithmétisation de l'analyse, 232-233.
- Axiome d'Archimède, 59, 171.
- Bi-rapport, 130, 146, 159.
- Congruences, 261, 265-268, 291.
- Coniques, 65, 93, 129, 133, 165.
- Constructibilité à la règle et au compas, 51, 93.
- Continuité, 223, 225-226, 231.
- Convergence des séries, 225, 235-236.
- Convergence uniforme, 232, 237.
- Coordonnées homogènes, 145, 149.
- Coordonnées projectives, 148.
- Coordonnées tangentielles, 150.
- Corde vibrante (problème des), 223.
- Corps, 252, 261, 288, 295-296.
- Corps de décomposition, 252, 276-277.
- Coupe, 206.
- Courbes algébriques, 214.
- Courbes transcendentes, 215.
- Courbure, 156-157.
- Cycloïde, 180.
- Cyclotomique (équation), 113, 274.
- Dénombrable (ensemble), 230, 239.
- Dérivée, 189, 194, 200-203, 227, 231.
- Déterminant, 281-283.
- Différentielle, 196.
- Diophantienne (analyse), 80, 90, 111-112, 264.
- Divisibilité, 112, 268.
- Dualité, 143-144.
- Duplication du cube, 50, 93.
- Ensembles (théorie des), 238-242.
- Entiers (de Gauss), 258, 268-269.
- Équations cubiques, 93-97, 98-99, 105-108.
- Équations linéaires, 73, 75, 85, 283.
- Équations quadratiques, 74, 80, 85.
- Espace vectoriel, 284-285.
- Exhaustion (méthode d'), 68, 170-174, 181.
- Exponentielle (fonction), 254.
- Extension algébrique, 102, 268.
- Extraction des racines, 84, 88, 97.
- Fermat (théorème de), 112, 291.
- Figures (nombres), 48-49.
- Fluxions (méthode des), 192-193, 217.
- Fonction (définition de la), 208, 217, 221, 224, 228, 231, 242.
- Forme (quadratique), 156, 160, 264, 281.
- Formes (théorie des), 264-265, 283-284.
- Fractions continues, 102-104, 219.
- Fractions décimales, 92, 100.
- Géométrie analytique, 110, 135-138, 285.
- Gnomon, 48, 90.
- Groupes (théorie des), 117, 265, 266, 269, 271-272, 288-290.
- Groupe de permutations, 270-272, 275-277.
- Groupe de transformations, 162-165, 290.
- Harmonique (division), 128-132.
- Hexagramme mystique, 134.
- Homogénéité (des équations), 73, 86, 110, 145.
- Homographie, 146.
- Homologie, 133, 141-142.
- Idéal, 194.
- Idéaux (nombres), 291-294.
- Imaginaires (éléments), 142.
- Imaginaires (nombres), 108, 219, 248-256.
- Incommensurables (grandeurs), 101, 168.
- Indivisible, 178-181.
- Infini, 169, 177, 219, 241.
- Infini (éléments à l'), 130, 142.
- Infiniment petit, 178, 191-192, 196, 198-199, 202.
- Intégrale, 184, 196, 203-204, 230, 243-244.
- Invariant, 162-163, 284.

Limite, 170, 200-201, 216, 225.
 Logarithme (fonction), 212-214, 220, 253.
 Logistique, 18, 77.
 Loi de composition, 260, 265, 280, 284, 288.
 Mesure, 230, 243.
 Nombre (concept de), 101-104.
 Nombres (théorie des), 63-64, 111-112, 291-292.
 Numération, 12-16, 18-20.
 Octaves de Cayley, 261, 279.
 Parallèles (théorie des), 122, 151-153.
 Peano (fonction de), 238, 240.
 Perspective, 126-129.
 Pi (π), 51, 68, 100, 120-121.
 Platoniciens (solides), 53.
 Polarité, 132, 144.
 Principe de permanence, 219, 279.
 Problème inverse des tangentes, 188, 217-218.
 Projective (transformation), 146-147, 164-165.
 Proportions du livre V (théorie des), 57, 102, 171, 193, 210, 214-215.

Puissance d'un point par rapport à une conique, 123-125.
 Pythagoriciens (triplets), 75, 81.
 Quadrature, 171, 182-184, 188.
 Quadrature du cercle, 50.
 Quadrique, 137, 161, 283.
 Quaternions, 260, 279.
 Racine primitive, 115, 271.
 Réels (théorie des nombres), 104, 205-207.
 Résidu quadratique, 268.
 Résolubilité par radicaux, 113-118, 222, 274-277, 290.
 Saccheri (quadrilatère de), 152.
 Série entière, 216, 225, 234.
 Série trigonométrique, 224, 227-231, 238.
 Substitution, 117, 270-272.
 Surface de Riemann, 234.
 Système linéaire, 281-283.
 Trigonométrie, 69, 254.
 Trisection de l'angle, 50, 93, 100.

Index des noms propres

Abel, 117, 225, 232, 271, 274.
 Alberti, 128, 130.
 Alembert (d'), 199, 223, 234, 250.
 Anaximandre, 44.
 Anaximène, 44.
 Apollonius, 65-67, 128.
 Archimède, 67-68, 171-174, 209.
 Argand, 256-257.
 Aristée, 65.
 Aristote, 17, 29, 54, 55, 209.
 Artin, 276.
 Ascoli, 236.
 Bacon (Roger), 210.
 Baire, 231, 236, 242.
 Banna (Ibn Al-), 101.
 Barrow, 111, 187-188.
 Beaune (de), 215.
 Bellavitis, 285.
 Beltrami, 158.
 Bernoulli (Daniel), 223-224, 227.
 Bernoulli (Jacques), 136.
 Bernoulli (Jean), 197, 218, 220.
 Bessel, 154, 258.
 Bezout, 111, 137.
 Binet, 283.
 Biruni (Al-), 94, 176.
 Bolyai, 153-154.
 Bolzano, 202, 225, 238, 251.
 Bombelli, 107, 253.
 Boole, 280.
 Borel, 236, 242, 243.
 Borrel (ou Buteo), 109.
 Bourbaki, 211, 297.
 Bradwardine, 103, 177, 210.
 Brianchon, 144.
 Briggs, 214.
 Brunelleschi, 127.
 Bürgi, 214.
 Buridan, 30.
 Cantor, 205, 238.
 Cardan, 105, 106.
 Cartan (Élie), 287.
 Cauchy, 117, 142, 202-204, 225, 232-239, 257, 261, 270-272, 283.
 Cavalieri, 178-181.
 Cayley, 160-161, 284-285, 288-289.
 Chasles, 146, 159.
 Clairaut, 137.
 Cohen (Paul), 241.
 Condorcet, 39.
 Copernic, 33-34.
 Cotes, 113.
 Cramer, 187, 281.
 Darboux, 230.
 Dedekind, 205-207, 237-239, 293-296.
 Desargues, 128-193.
 Descartes, 110, 135-136, 187, 215.
 Dini, 236.
 Dioclès, 68.
 Diophante, 77-82, 111.
 Dirichlet (Lejeune-), 228-229, 232.
 Dürer, 129.
 Eisenstein, 222.
 Eratosthène, 68.
 Euclide, 55-64, 122, 151.
 Eudème, 122.
 Eudoxe, 57.
 Euler, 112, 137, 200, 220-223, 223-224, 250, 253, 266.
 Eutocius, 70, 93.
 Fatou, 245.
 Fermat, 111-112, 136, 183-184, 186-187.
 Ferrari, 106.
 Ferro (Scipione del), 105.
 Fibonacci (cf. Léonard de Pise).
 Fischer, 245.
 Fourier, 227.
 Français, 256.
 Fredholm, 228.
 Frénicle, 172.
 Galilée, 34, 212.
 Galois, 117, 268, 271, 273-277, 290.
 Gauss, 112, 114, 153-155, 159, 225, 251-252, 258, 264-269, 283, 291.
 Gérard de Crémone, 27.
 Gerbert d'Aurillac (Sylvestre II), 24.

- Gergonne, 144, 256.
 Gibbs, 287.
 Girard, 110, 248.
 Grassmann, 285-287.
 Grégoire de Saint-Vincent, 174, 181.
 Gregory (James), 187, 215.
 Grosseteste, 29.
 Gua (de), 113.
 Gudermann, 232.

 Hadamard, 218.
 Hamilton, 259-261, 286.
 Hankel, 100, 239.
 Harriot, 110.
 Haytham (Ibn-Al), *dit* Alhazen, 93, 176.
 Heaviside, 287.
 Heine, 205, 222.
 Hermite, 163, 284.
 Héron (d'Alexandrie), 70, 125.
 Heytesbury, 210.
 Hilbert, 166.
 Hipparque, 69.
 Hippocrate de Chio, 64.
 Huygens, 195, 227.
 Hypathie, 70.
 Hypsiclès, 69.

 Jordan, 274, 288-290.

 Kamil (Abu), 86.
 Karagi (Al-), 88-92, 126.
 Kashi (Al-), 100-101.
 Kepler, 34, 178, 212.
 Khayyam (Al-), 94, 151-152.
 Khazin (Al-), 93.
 Khwarizmi (Al-), 84.
 Klein, 161-165, 290.
 Kronecker, 261, 295-296.
 Kummer, 261, 291-293.
 Kuhi (Al-), 176.
 Kushay Ibn Labban, 88.

 Lacroix, 201.
 Lagrange, 112, 116, 200-201, 216, 225, 250, 264-266.
 Laguerre, 159.
 La Hire (Philippe de), 133-135.
 Lambert, 51.
 Laplace, 39.
 Lebesgue, 243-245.
 Legendre, 112, 153.
 Leibniz, 37, 194-197, 217-218, 220.
 Léonard de Pise, 27.
 L'Hospital (marquis de), 198, 218.
 Lie, 150, 290.
 Lindemann, 51.
 Liouville, 271, 273, 295.
 Lobatchevski, 153-156.

 Maclaurin, 137, 197.
 Mahani (Al-), 93.

 Maurolico, 109.
 Maxwell, 287.
 Ménechme, 65.
 Ménélaüs, 69, 130.
 Méray, 205, 225.
 Mercator, 215.
 Mersenne, 36.
 Méziriac (Bachet de), 111.
 Möbius, 145, 148.
 Moivre (de), 113, 253.
 Monge, 137-139.
 Morgan (de), 279-280.
 Mourey, 256.
 Musa (Banu), 125, 174.

 Napier, 212-214.
 Nasawi (An), 88.
 Netto, 240.
 Newton, 136, 190-194, 216-217.
 Nicomaque de Gérase, 24, 70, 76.
 Nicomède, 68.

 Oresme, 103, 177, 210-211.

 Pacioli, 105.
 Pappus, 70, 130.
 Parménide, 50.
 Pascal, 133-134, 144, 184.
 Peacock, 278, 279.
 Peano, 287.
 Peirce, 280.
 Peletier, 109.
 Platon, 17, 51-52, 76.
 Plücker, 145, 149-150.
 Poincaré, 287.
 Poncelet, 139-146.
 Proclus, 70, 122.
 Ptolémée, 69-70, 208.
 Pythagore, 46-49, 122, 168.

 Qalāsadi (Al-), 101.
 Qasi-Sada, 100.

 Regiomontanus, 33, 77, 92.
 Riemann, 155-159, 166, 229, 230, 233, 234.
 Riesz, 245.
 Roberval, 179-181, 185.
 Rolle, 253.
 Ruffini, 117.

 Saint-Venant (Barré de), 257.
 Samaw'al (Al-), 90-92.
 Schooten (Van), 136.
 Seidel, 232.
 Servois, 256-257.
 Socrate, 50.
 Staudt (Von), 148-149, 159.
 Steiner, 148.
 Steinitz, 296.
 Stevin, 103, 107, 177.

 Stifel, 103, 107, 212.
 Stirling, 113, 254.
 Stokes, 232.
 Swineshead, 177, 210.
 Sylvester, 284.

 Tartaglia, 105-106, 126.
 Thabit Ibn Qurra, 125, 174-176.
 Thalès, 17, 43, 46.
 Torricelli, 179, 185.
 Tschirnhaus, 113.
 Tusi (Nasir Al Din Al-), 99.
 Tusi (Sharaf Al Din Al-), 97-100.

 Uqidisi (Ul-), 88.

 Valerio, 177.
 Van der Monde, 114.

 Viète, 108-109, 211.
 Vinci (Léonard de), 31, 127.
 Volterra, 228, 236.

 Wafa (Abu-l'), 88, 126-127.
 Wallis, 112, 136, 187, 254.
 Wantzel, 93.
 Warren, 256.
 Weber, 290, 296.
 Wedderburn, 268.
 Weierstrass, 205, 231, 233, 235-236.
 Wessel, 256.

 Xylander, 111.

 Zénodore, 69.
 Zénon d'Élée, 50, 169-170.

Table

Préface	7
Avertissement	9
1. Paysages	12
1. Les premières civilisations anciennes	12
2. La Grèce	16
3. La civilisation arabe	19
4. Le Haut Moyen Age chrétien	24
5. Les premières infiltrations	24
6. La toute-puissance de l'Église	25
7. Le siècle des grandes traductions	26
8. L'époque de Léonard de Pise (Italie, Espagne)	27
9. L'âge d'or de la Scolastique	28
10. Le Cinquecento et les nouvelles aspirations scientifiques	30
11. La diffusion des idées neuves au XVI ^e siècle	31
12. Premiers progrès : arithmétique et algèbre	32
13. La réforme de l'astronomie. Copernic	33
14. Les lois de Kepler	34
15. La mathématisation de la science au XVII ^e siècle	35
16. La vie scientifique au XVII ^e siècle	36
17. Création et rôle des académies des sciences	36
18. Le XVIII ^e siècle mathématique	37
19. La prééminence de l'école française à la Révolution	38
20. Les nouvelles conditions du travail mathématique au XIX ^e siècle	40
2. Un moment de rationalité : la Grèce	43
1. L'émergence d'une pensée abstraite dans l'école ionienne	43
2. Les mathématiques ioniennes : Thalès	46
3. La conception arithmétique de l'école de Pythagore	46
4. La réaction : les Éléates	50
5. Les sophistes	50
6. L'Académie platonicienne	51
7. Aristote et le Lycée	54

8. Les <i>Éléments</i> d'Euclide	55	5. La limite : de l'impensé au concept	168
9. Apollonius et les sections coniques	64	1. Nombres et grandeurs géométriques	168
10. L'École d'Alexandrie	67	2. L'intrusion de l'infini : les paradoxes de Zénon	169
3. La constitution de l'algèbre classique	72	3. La méthode d'épuisement : la négation de l'infini	170
1. Les équations affines et quadratiques dans les civilisations antiques ...	72	4. La reprise arabe	174
2. « L'algèbre géométrique » euclidienne	76	5. Le Moyen Âge : l'âge de respectabilité	176
3. Les <i>Arithmétiques</i> de Diophante	77	6. La libéralisation : Stevin, Valerio	177
4. Les mathématiques arabes	83	7. Les considérations infinitésimales de J. Kepler	178
5. Al-Khwarizmi et la naissance de l'al-jabr	84	8. La méthode des indivisibles	178
6. Abu Kamil, premier disciple	86	9. L'éclosion des méthodes infinitésimales au XVII ^e siècle	181
7. L'école d'Al-Karaji : les algébristes-arithméticiens	88	10. La création du calcul infinitésimal	190
8. Les géomètres-algébribistes et la résolution géométrique des équations cubiques	93	11. Fuite en avant	197
9. Résolution numérique et méthodes d'approximation de Sharaf Al-Din Al-Tusi à Al-Kashi	96	12. Essais de fondement	198
10. La notion de nombre	101	13. L'élucidation des concepts de base	202
11. La Coss allemande	104	14. Une première théorie de l'intégration	203
12. Les algébristes italiens de la Renaissance	105	15. La rigueur weierstrassienne	205
13. Le symbolisme algébrique	108	16. La construction des nombres réels	205
14. L'émancipation de l'algèbre par rapport à la géométrie	110	6. Le concept de fonction et le développement de l'analyse	208
15. Fermat et le réveil de la théorie des nombres	111	1. L'âge de l'Antiquité	208
16. La résolution algébrique : piétinements et avancées	113	2. Les Écoles d'Oxford et de Paris	209
17. Abel : l'équation du cinquième degré	117	3. De l'étude des mouvements à celle des trajectoires	211
4. Figures, espaces et géométries	120	4. L'exemple de la fonction logarithme	212
1. Des origines pragmatiques	120	5. Descartes : courbes géométriques et fonctions algébriques	214
2. L'exigence démonstrative de la géométrie grecque	122	6. Les algorithmes infinis	215
3. Les contributions arabes	125	7. Un nouvel objet mathématique : la loi de variation	216
4. La perspective et la naissance de la géométrie projective	126	8. L'analyse algébrique du XVIII ^e siècle	218
5. La géométrie analytique et l'étude des courbes au XVIII ^e siècle	135	9. Le phénomène des fonctions « multiformes »	219
6. La géométrie descriptive. Gaspard Monge	137	10. <i>Introductio in Analysin Infinitorum</i> d'Euler	221
7. Le traité de Poncelet : synthèse et manifeste de la géométrie projective	139	11. L'équation aux cordes vibrantes	223
8. Les transformations géométriques	146	12. L'ascension du calcul fonctionnel	224
9. Les coordonnées projectives de von Staudt	148	13. L'effort de rigueur	225
10. Formulations analytiques	149	14. Le développement des fonctions en séries trigonométriques	227
11. Les géométries non euclidiennes	151	15. La notion de fonction arbitraire et ses conséquences	231
12. Interprétation projective des notions métriques	159	16. Séries de fonctions continues et convergence uniforme	232
13. La nature projective des géométries non euclidiennes	161	17. La théorie des fonctions de la variable complexe	233
14. La synthèse : le programme d'Erlangen	162	18. Les débuts de la théorie des ensembles et de la topologie générale	238
15. Débordements	166	19. Les fonctions discontinues. Controverse sur le concept de fonction	242
		20. Le point de vue intégral	243
		7. Au carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie : les nombres complexes	248
		1. Le théorème fondamental de l'algèbre	248

2. La manipulation du symbole $\sqrt{-1}$ aux XVII ^e et XVIII ^e siècles	253
3. La représentation géométrique des imaginaires	254
4. Réalisme géométrique contre formalisme de l'algèbre symbolique	256
5. Le véritable initiateur : Gauss	258
6. Le point de vue arithmétique de Hamilton	259
7. Le point de vue algébrique des congruences de Cauchy	261
8. Nouveaux objets. Nouvelles lois. L'émergence des structures algébriques ...	263
1. Les <i>Recherches arithmétiques</i> de Gauss	264
2. Groupes de substitutions et théorie de Galois	270
3. L'école algébrique anglaise	278
4. Les structures linéaires	281
5. L'essor de la théorie des groupes	288
6. L'école allemande et les origines de l'algèbre commutative	291
7. Le nouveau visage de la Mathématique	296

Annexes

Glossaire	301
Notations usuelles	303
Quelques ouvrages généraux de référence	304
Index	305

Collection Points

SÉRIE SCIENCES

dirigée par Jean-Marc Lévy-Leblond et Nicolas Witkowski

- S1. La Recherche en biologie moléculaire, *ouvrage collectif*
- S2. Des astres, de la vie et des hommes
par Robert Jastrow (épuisé)
- S3. (Auto)critique de la science
par Alain Jaubert et Jean-Marc Lévy-Leblond
- S4. Le Dossier électronucléaire
par le syndicat CFDT de l'Énergie atomique
- S5. Une révolution dans les sciences de la Terre
par Anthony Hallam
- S6. Jeux avec l'infini, *par Rózsa Péter*
- S7. La Recherche en astrophysique, *ouvrage collectif*
(nouvelle édition)
- S8. La Recherche en neurobiologie (*épuisé*)
(voir nouvelle édition, S 57)
- S9. La Science chinoise et l'Occident
par Joseph Needham
- S10. Les Origines de la vie, *par Joël de Rosnay*
- S11. Échec et Maths, *par Stella Baruk*
- S12. L'Oreille et le Langage
par Alfred Tomatis (nouvelle édition)
- S13. Les Énergies du Soleil, *par Pierre Audibert*
en collaboration avec Danielle Rouard
- S14. Cosmic Connection ou l'Appel des étoiles
par Carl Sagan
- S15. Les Ingénieurs de la Renaissance, *par Bertrand Gille*
- S16. La Vie de la cellule à l'homme, *par Max de Ceccatty*
- S17. La Recherche en éthologie, *ouvrage collectif*
- S18. Le Darwinisme aujourd'hui, *ouvrage collectif*
- S19. Einstein, créateur et rebelle, *par Banesh Hoffmann*
- S20. Les Trois Premières Minutes de l'Univers
par Steven Weinberg
- S21. Les Nombres et leurs mystères
par André Warusfel
- S22. La Recherche sur les énergies nouvelles, *ouvrage collectif*
- S23. La Nature de la physique, *par Richard Feynman*
- S24. La Matière aujourd'hui, *par Émile Noël et al.*
- S25. La Recherche sur les grandes maladies, *ouvrage collectif*
- S26. L'Étrange Histoire des quanta
par Banesh Hoffmann et Michel Paty
- S27. Éloge de la différence, *par Albert Jacquard*
- S28. La Lumière, *par Bernard Maitte*
- S29. Penser les mathématiques, *ouvrage collectif*

S30. La Recherche sur le cancer, *ouvrage collectif*

S31. L'Énergie verte, *par Laurent Piermont*

S32. Naissance de l'homme, *par Robert Clarke*

S33. Recherche et Technologie

Actes du Colloque national

S34. La Recherche en physique nucléaire, *ouvrage collectif*

S35. Marie Curie, *par Robert Reid*

S36. L'Espace et le Temps aujourd'hui, *ouvrage collectif*

S37. La Recherche en histoire des sciences, *ouvrage collectif*

S38. Petite Logique des forces, *par Paul Sandori*

S39. L'Esprit de sel, *par Jean-Marc Lévy-Leblond*

S40. Le Dossier de l'Énergie

par le Groupe confédéral Énergie (CFDT)

S41. Comprendre notre cerveau

par Jacques-Michel Robert

S42. La Radioactivité artificielle

par Monique Bordry et Pierre Radvanyi

S43. Darwin et les Grandes Énigmes de la vie

par Stephen Jay Gould

S44. Au péril de la science ?, *par Albert Jacquard*

S45. La Recherche sur la génétique et l'hérédité

ouvrage collectif

S46. Le Monde quantique, *ouvrage collectif*

S47. Une histoire de la physique et de la chimie

par Jean Rosmorduc

S48. Le Fil du temps, *par André Leroi-Gourhan*

S49. Une histoire des mathématiques

par Amy Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer

S50. Les Structures du hasard, *par Jean-Louis Boursin*

S51. Entre le cristal et la fumée, *par Henri Atlan*

S52. La Recherche en intelligence artificielle, *ouvrage collectif*

S53. Le Calcul, l'Imprévu, *par Ivar Ekeland*

S54. Le Sexe et l'Innovation, *par André Langaney*

S55. Patience dans l'azur, *par Hubert Reeves*

S56. Contre la méthode, *par Paul Feyerabend*

S57. La Recherche en neurobiologie, *ouvrage collectif*

S58. La Recherche en paléontologie, *ouvrage collectif*

S59. La Symétrie aujourd'hui, *ouvrage collectif*

S60. Le Paranormal, *par Henri Broch*

S61. Petit Guide du ciel, *par A. Jouin et B. Pellequer*

S62. Une histoire de l'astronomie

par Jean-Pierre Verdet

S63. L'Homme re-naturé, *par Jean-Marie Pelt*

S64. Science avec conscience, *par Edgar Morin*

S65. Une histoire de l'informatique

par Philippe Breton

S66. Une histoire de la géologie, *par Gabriel Gohau*

S67. Une histoire des techniques, *par Bruno Jacomy*

S68. L'Héritage de la liberté, *par Albert Jacquard*

S69. Le Hasard aujourd'hui, *ouvrage collectif*

S70. L'Évolution humaine, *par Roger Lewin*

S71. Quand les poules auront des dents

par Stephen Jay Gould

S72. La Recherche sur les origines de l'univers

par La Recherche

S73. L'Aventure du vivant, *par Joël de Rosnay*

S74. Invitation à la philosophie des sciences

par Bruno Jarrosson

S75. La Mémoire de la Terre, *ouvrage collectif*

S76. Quoi ! C'est ça, le Big-Bang ?

par Sidney Harris

S77. Des technologies pour demain, *ouvrage collectif*

S78. Physique quantique et Représentation du monde

par Erwin Schrödinger

S79. La Machine univers, *par Pierre Lévy*

S80. Chaos et Déterminisme, *textes présentés et réunis*

par A. Dahan-Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla

S81. Une histoire de la raison, *par François Châtelet*

(entretiens avec Émile Noël)

S82. Galilée, *par Ludovico Geymonat*

S83. L'Age du capitaine, *par Stella Baruk*

S84. L'Heure de s'enivrer, *par Hubert Reeves*

S85. Les Trous noirs, *par Jean-Pierre Luminet*

S86. Lumière et Matière, *par Richard Feynman*

S87. Le Sourire du flamant rose

par Stephen Jay Gould

S88. L'Homme et le Climat, *par Jacques Labeyrie*

S89. Invitation à la science de l'écologie

par Paul Colinvaux

S90. Les Technologies de l'intelligence

par Pierre Lévy

S91. Le Hasard au quotidien, *par José Rose*

S92. Une histoire de la science grecque

par Geoffrey E. R. Lloyd

S93. La Science sauvage, *ouvrage collectif*

S94. Qu'est-ce que la vie ?, *par Erwin Schrödinger*

S95. Les Origines de la physique moderne

par I. Bernard Cohen

S96. Une histoire de l'écologie, *par Jean-Paul Deléage*

S97. L'Univers ambidextre, *par Martin Gardner*

S98. La Souris truquée, *par William Broad et Nicholas Wade*

S99. A tort et à raison, *par Henri Atlan*

S100. Poussières d'étoiles, *par Hubert Reeves*

S101. Fabrice ou l'École des mathématiques

par Stella Baruk

S102. Les Sciences de la forme aujourd'hui, *ouvrage collectif*

S103. L'Empire des techniques, *ouvrage collectif*

S104. Invitation aux mathématiques, *par Michael Guillen*